2. 中　学　校

1．空間の幾何（第２学年）

荊木 聡
貝塚市立第三中学校

1. 主題名 『空間の幾何』

2. 授業のねらい

①空間図形のイメージを養う。
②点・直線・平面における相互関係について、直観的・論理的に理解する。
③直線や平面の位置関係（平行・交わる〔垂直〕・ねじれの位置）を判断し説明できる。
④論理的な意味づけをしながら、切断面を描いていくことができる。

3. 指導計画（全６時間）

<table>
<tr><td rowspan="2">第１次</td><td rowspan="2">第１時</td><td>授業場面１：直線と平面に関する公理と定理の証明</td></tr>
<tr><td>授業場面２：直線・平面の位置関係</td></tr>
<tr><td rowspan="2">第２次</td><td>第２時</td><td>授業場面３：直線と平面の垂直</td></tr>
<tr><td>第３時</td><td>授業場面４：三垂線の定理</td></tr>
<tr><td rowspan="2">第３次</td><td rowspan="2">第４時</td><td>授業場面５：直線・平面の平行</td></tr>
<tr><td>授業場面６：投影図と２直線の位置関係</td></tr>
<tr><td rowspan="4">第４次</td><td rowspan="2">第５時</td><td>授業場面７：平行な２面にできた切断線の位置関係</td></tr>
<tr><td rowspan="2">授業場面８：立方体における切断面の描き方
および その手順に対する論理的な意味づけ</td></tr>
<tr><td rowspan="2">第６時</td></tr>
<tr><td>授業場面９：まとめの練習課題</td></tr>
</table>

4. 本単元の教材観・指導観

本単元は、中学１年生で学習する空間教材を論理的な視点から捉え直したものである。これまでは、小学校と中学２年の論証との接点に位置するという点にも配慮して、主として直観的な理解だけで済ませていた。しかしその結果、義務教育において空間図形に関する論証は全く扱われないことになり、直観で判断しづらい生徒は思考の糸口すら見出せず、空間に対する苦手意識を固定化させてしまいかねないのである。また、中学２年で突然出てくる論証に戸惑う生徒も多い。

本稿に示す一連の授業は、直観的な理解も従来通り大切に扱いながらも、それに論理的な視点を加えて、両面から理解を促そうとしている。指導にあたっては、実物模型などの具体物を多用するとともに、口述証明を中心に置きながら論理的な思考に慣れさせることも重視したい。

なお、以下に示す実践は、諸般の事情から２年生の選択数学において試験的に行ったものである。しかし、本来は中学１年を対象に実践したいと考えるものである。

5. 学習過程とその考察

(1)第1次

①授業場面1について

【授業概略】

A：平面上の２点を通る直線は、この平面に含まれる。
B：１直線上にない３点を通る平面は、ただ一つである。
C：２平面に共有点があれば、その交わりは直線である。

まず、空間幾何で基本となる公理・性質として上の３つを提示し、模型を使った実演・実験を通して理解させる。Bの内容については、「１点を通る平面」「２点を通る平面」「１直線上にある３点を通る平面」「１直線上にない３点を通る平面」のそれぞれについて、班ごとで簡単な模型を作らせ、平面に見立てた工作用紙の動ける範囲を考察させるとともに、任意の４点を通るような平面を作ろうとすると、工作用紙が歪んで曲面になることも押さえた。

Cの内容は、工作用紙を３枚準備し、指導者が実演した。工作用紙の一方の角を他方の中央で接するようにし、共有点が一つある状態を作った。その後、平面とは無限に広いものであることを確認して、一方の工作用紙を周辺に広げていくイメージを持たせた。そして最後に、残していた３枚目の工作用紙を利用して、広げたときのイメージが正しかったかを確認した。

次に、上のA,B,Cを利用して、次の定理を口述証明させた。記述証明は困難であろう。

(Ⅰ)１直線とその上にない１点を含む平面はただ一つである。
(Ⅱ)交わる２直線を含む平面はただ一つである。
(Ⅲ)平行な２直線を含む平面はただ一つである。

(Ⅰ)については、１直線上の２点とその直線上にない１点を決めると、それは１直線上にない３点を決めたことになるので、上述のBより成り立つことが確認される。また、(Ⅱ)(Ⅲ)も同様に、３点が決定できるので証明されるが、特に(Ⅲ)については(Ⅰ)を利用して証明する者も出た。

【考察】

この体験を通して、生徒は上の３点を納得し、当然の事実として記憶させることができた。また、授業後の感想文では、「１年の時は、一つひとつの内容を感覚的に理解してたけど、三角形の合同を証明するときのように、根拠を示しながら定理を証明していけることが分かった。」という授業のねらい通りのものが見られた。また、「初め戸惑ったけど、慣れると簡単だった。」という感想もあることから、内容的にはそれほど難しくないのであるが、経験不足が原因で多少の困惑が見られたと言える。そして全体としては、模型を実際に見て触って理解させることの効果と、根拠を明確にして誰もが納得できる説明をしていく感動体験の重要性が示唆されたのである。

②授業場面2について

【授業概略】

位置関係に着眼して、場合分けした。その結果、以下の内容にまとめることができた。括弧内は、生徒との問答を通して補足した事柄である。生徒の発言の中には「垂直」という言葉もあったが、それは「交わる」の特殊な場合であり、ここでは「交わる」場合に含めておく旨を伝えた。

<table>
<tr><td>(a)２平面の位置関係
・平行　(共有点なし)
・交わる（１直線を共有)</td><td>(b)直線と平面の位置関係
・平行　(共有点なし)
・交わる（１点を共有)
・含まれる</td></tr>
<tr><td colspan="2">(c)２直線の位置関係
・交わる（１点を共有、勿論同一平面上にある）
・平行　(同一平面上にあって、共有点がない)
・ねじれの位置（同一平面上にない、勿論共有点を持たない）</td></tr>
</table>

さて、本授業場面では場合分けそのものよりも、それぞれの位置関係を分析して別な表現で説明させる点を重視した。上述の括弧内の視点を大切にしたのである。

例えば、2直線の位置関係であれば、「交わる」を説明させる状況を設けることで、共有点の有無という観点が生徒の側から出された。さらに、「平行」と「ねじれの位置」を区別しようとすることで、同一平面上かどうかという視点も自然に生まれてきた。その上で、共有点と同一平面上という2つの観点から、それぞれの位置関係を明確に説明できるようにしたのである。同時に、多様な捉え方をするという観点から、「交わる」を「2直線が平行ではなく、同一平面上にある」と捉えたり、「ねじれの位置」を「第一の直線が第二の直線を含む平面と1点で交わり、しかもその点は第二の直線上にはない。」と置き換えたりできることも押さえた。

【考察】

本単元終了後の復習テストで、第2章の 1－3「中学生の実態から見た問題点」で示した三角錐台の問題に取り組ませたところ、AD と BE が交わる理由を論理的に答えたものは 65%であり、その内の8割以上が「同一平面」という視点が入った記述であった。

また、AD と EF がねじれの位置にある理由も 32%おり、記述内容も「もし、AD と BE が同一平面上ならば、BE は AD を含む平面と AD 上で交わるか、それともその平面に含まれるかのどちらかである。しかし、実際はそのどちらでもないので AD と BE は同一平面上にはなく、したがってねじれの位置にあると言える。」という意味のことが述べられる等、背理法を用いて見事に証明しているのである。さらに、AD と CE がねじれの位置にある理由を論理的に記述できた者も 21%に上昇し、全体として一定の成果が認められた。

(2)第2次

①授業場面3について

【授業概要】

直線と平面の垂直については、直観的・感覚的な理解であるとは言え、すでに小学校でも学習している。そこで、“ピサの斜塔” の模型を箱の中にいれ、幾つかの覗き窓を開けたものを準備し、中の様子を観察させて塔が地面に対して垂直に立っているかを問うことから始めた。

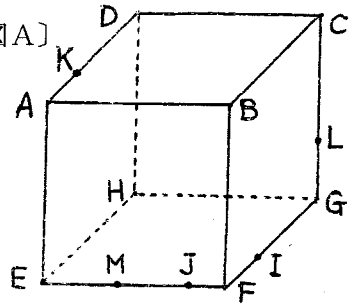
初めは、見かけ上、垂直に立っているように見える位置から観察させたため、半数程度の者が「垂直」であると判断した。ここで、垂直の定義について質問したが、中学1年で学習しているにも拘わらず、正確に答えられる者はいなかったため、下の定義を指導者が示した。

次に、箱に開けた別の覗き窓から中を観察させ、塔が傾いていることを確認させた。この時、塔が垂直でなかったことに驚く者が何人も現れたので、その驚きの内容を明らかにすることにした。こうして、直線と平面が垂直であることを確認するには、2方向から観察する必要があることが分かったのである。そして、その感覚的に捉えた内容を、下の定理としてまとめた。

最後は、この定理を証明するための道筋を簡単に示すとともに、練習課題として「①図Aは、立方体の見取図である。この図において、AB⊥面 BFGC であることを言え。」「②AB⊥BG であることを言え。」「③平面と平面の垂直条件を考えよ。」を出した。

定義：直線と平面の垂直
　直線 l が平面 α と点Pで交わり、点Pを通る α 上のどの直線とも垂直であること。
定理：直線と平面の垂直条件
　直線 l が平面 α と点Pで交わり、点Pを通る α 上の2直線と垂直であれば、$l \perp \alpha$ である。

〔図A〕



【考察】

観察を通して、驚きや感動をある程度味わわせることができ、その結果、上の定理の意味が実感として理解されたようである。特に、授業の最後に行った練習課題①では、直観に頼ることなく、AB⊥BF, AB⊥BC であることを押さえている生徒が 73%であった。課題②についても、①で証明した事実と垂直の定義から自明とした生徒が５割を超えた。

また、自力では解けなくとも、ほとんどの者が級友の説明を聞いて理解できており、ここで必要となる論理的思考は、三角形や平行四辺形に関わる様々な定理の証明に必要な思考に比べて容易であることが分かる。中学１年段階で、もっと論理的思考を鍛えていく場を設定しなければならないと言えよう。

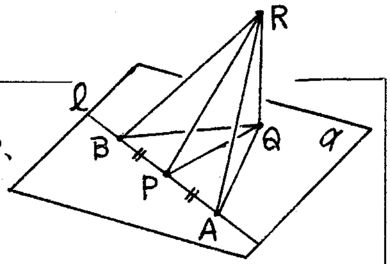
②授業場面4について

【授業概要】

《 三垂線の定理 》

右の図のように、平面 α 上に直線 l があり、l 上の点 P、l 上にない α 上の点 Q、α 上にない点 R を考える時、

QR⊥α，PQ⊥l ならば PR⊥l である。



まず、三垂線の定理の「PR⊥l」の部分を空欄にして予想させた。次に、班に分かれて、簡単な模型を作らせた。実際に測ってみると、多少の誤差はあったが、ほぼ 90°であることが確認された。その後、三垂線の定理の証明を生徒にさせた。証明方法は幾つか考えられるが、いずれにしても独力で証明するのは困難であると判断されたので、ここでは上図のように点 A, B を取り、三角形の合同を何度も繰り返し証明していくという流れを伝えた。

こうして証明はスムーズに終えたが、生徒にとってこの定理は多少複雑であるため、定理の全体像を摑みづらそうにしていた。そこで、この定理を自明のこととして直観的に受け入れられるよう、２本の棒が垂直に交わっている模型を見せ、一方の棒を直線 l、他方を直線 PQ と見なし、l を軸にして PQ を回転してみせた。ただ、この実演に論理的な説明を加えると、また別の証明を示すことになるので、それはしなかった。そして、PQ を回転してできる平面 β 上に点 R があることを感覚的に捉えさせ、「直線 PR は β 上にあるから、PR⊥l になるんだね」とだけ伝えた。

授業の後半では、練習課題「図Ａの EF 上に点Ｐをとり、∠DPI ＝ 90°となる P の位置を２か所求めたい。次に示した正方形は（※ここでは図を省略）立方体の底面 EFGH を示している。これに点Ｐの位置を図示せよ。」を考えさせた。

【考察】

練習課題については、HP⊥IP となるような点Ｐを探そうとした生徒が３割弱、さらに半円に対する円周角が 90°であることを利用して P の位置を答えた者が 12%であり、正答率はそれほど高いとは言えないが、三垂線の定理の説明に用いた図を意識して取り組んでいる姿が見られた。実際、表現が稚拙なものも含めると、ほとんどの者が「三垂線の定理」の内容を口頭で述べることができた。これは、模型を作ったり、２本の棒で実演したりして、体験的・感覚的な理解についても 論理的理解と同様に 重視した成果であろうと考える。

(3)第3次

①授業場面5について

【授業概要】

まず、下に示した「平行の推移律」を実演によって感覚的に理解させた。次に、その発展とし

て 3直線p, q, rを 部分的に平面α、β、γに置き換えても成立するかを確認させた。その後、直線と平面、平面と平面の平行条件についても実演による確認をしたが、本授業場面では論理的に証明することは避けた。

そして最後に、直線・平面の垂直や平行に関わる命題を幾つか提示し、その真偽を問うた。

〔平行の推移律〕
3直線p, q, rについて、 $p//q$, $q//r$ ならば $p//r$ である。
〔直線と平面の平行条件〕
平面α上にない直線lに対して$l//m$である直線mがα上に存在すれば、$l//\alpha$である。
〔平面と平面の平行条件〕
平面α上の交わる2直線a、bに対し、$a//c$、$b//d$である直線c、dが平面β上に存在すれば、$\alpha//\beta$である。

【考察】

平行の推移律を証明するには、幾つかの段階を踏んでいく必要があるので、本授業では省くことにしたが、時間的に余裕がある場合は扱ってもよいかも知れない。

ここでは、むしろ命題の真偽を判定し、生徒自らが論理的・直観的に説明するという部分に重きを置いた。この辺りまで授業が進んでくると、空間内で論理的に考えることに慣れてくる生徒が出てくる。例えば、命題「平面α、直線l, mにおいて、$\alpha \perp l$, $l \perp m$ならば、$\alpha \perp m$」の真偽について、論理的に説明できた生徒がいたし、その説明を聞いて理解できない生徒もほとんどいなかった。勿論、真偽の判定だけなら、ほとんどの生徒が正しく行えた。本授業のみの効果ではないだろうが、上述してきた一連の授業の効果が現れ始めていると言えるだろう。

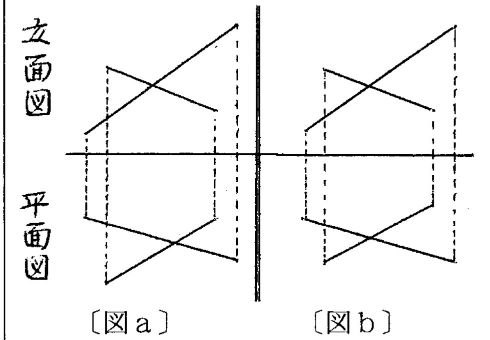
また、直観的・感覚的な説明であれば、多くの生徒が行うことができた。その際、準備しておいた数本の竹ひごと数枚の工作用紙を使用させたが、説明のポイントは、条件に合う状態を作ったときに、その状態を固定的に捉えるのではなく、可能な限り動的に考えておくということであった。この動的にイメージしておくという視点は、これまでの学習によって、自然に身に付けることができたと考えられる。

②授業場面6について

【授業概要】

授業前半は、投影図の説明を一通り行い、立面図・平面図・側面図に移った影の形から、元の立体を予想させた。3方向から見ると、「三角形・円・長方形」の影が映る立体を考えさせたりもした。その後、直方体や円錐について投影図を描かせてから、今度は逆に、描いた投影図から元の立体を必ずしも一意に決定できるとは限らないことを発見させた。立面図と平面図だけの投影図なら、なおさらの事である。

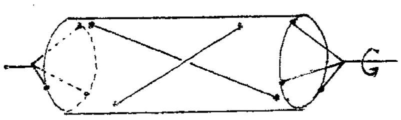
授業後半では、立面図・平面図からなる投影図を示して、2直線の位置関係を読み取らせた。



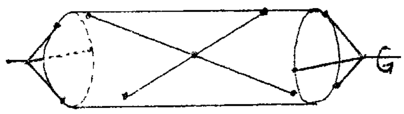
〔図a〕 〔図b〕

その際、2直線が平行である場合は判断が容易である。なぜなら、どの方向から見ても、その2直線は平行か、1直線に重なるかのどちらかだからである。しかし、2直線が交わっているのか、ねじれの位置にあるかの判断は難しく、例えば左の図aで2直線が交わっているかどうかは分かりにくいようである。そこで、図aとbを並べて提示して考えさせた。さらに、円柱形の透明容器(ペットボトルでも十分)を準備して観察させることにした。

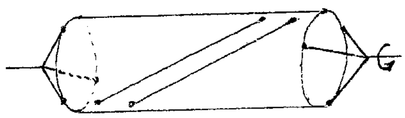
下の図は、この透明容器を模式的に示したものである。これには2本の紐が張られており、片方の目で観察させると遠近感がなくなり、交わっているのか、離れているのかの判断がつかなくなる。ところが、この容器を回転させて異なる方向から観察すると、2直線が交わっている場合とねじれの位置にある場合との違いが明確になるのである。



〔ねじれの位置 観察用〕



〔交わる2直線 観察用〕



〔平行2直線 観察用〕

【考察】

図aと図bを比較して考察させる場面では、2つの図の違いについては指摘することができたが、その違いが生まれる理由については9割の生徒が理解できなかった。これまでに、「平行・交わる・ねじれの位置」については、竹ひごや箒を使って生徒に説明させたり、論理的な側面から理解させたりしてきたが、これだけの学習では、投影図から位置関係を読み取るのは困難であることが分かる。

本授業では、2直線の位置関係を2本の紐で示し、様々な方向から観察するという経験を積ませた。透明容器を回転させると、ねじれの位置にある場合には、見かけ上の交差点が斜め方向にずれて見え、方向によっては離れて見える。それに対し、交わっている場合には、2直線の交点は上下にしか動かない。この事実を実感として持たせたことで、授業のまとめの段階では85%の生徒が「立面図・平面図における2直線の交点どうしを直線で結ぶ時、その直線が基線に対して垂直なら、その2直線は交わっている」という判別方法を自ら見出した。そして、本単元全体が終わった時に実施した復習テストにおいても、92%の生徒が図bの2直線の位置関係とその理由を正しく答えることができており、定着していることが見て取れた。本授業後の感想にも「実験してみて仕組みがよく分かった」とある通り、透明容器による観察が理解を容易にし、また知識の定着にも大きな役割を果たしたと考えられる。

(4)第4次

①授業場面7について

【授業概要】

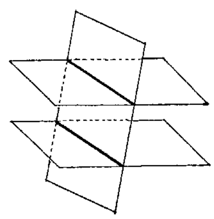
下の定理を模型で確認した後、それを証明した。独力で証明できた生徒も数名いたが、多くの生徒には手がかりがないように思えるらしく、しばらくしてから助言することにした。ここでは「2直線 l, m の位置関係の可能性としては何があるかな?」と問うた上で、「“ねじれの位置”、“交わる” はあり得ないことを述べよう」と指示し、口頭で答えさせた。

授業後半は、切断面を図示させる練習課題を考えさせた。まずは、簡単な課題から始めて、「切断線は必ず立体の表面上にできる」ことを押さえ、徐々に課題を難しくして、授業の最後に下の枠内に示した練習課題(4)を考えさせた。

定理:平行な2平面に第3の平面が交わった時にできる2本の交線は、平行である。

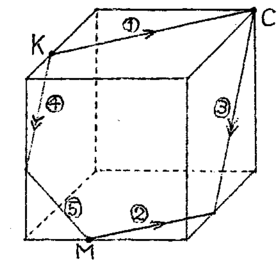
練習課題(4):

図Aにおいて、3点C, K, M を通る平面で切断したときの切り口を図示せよ。



【考察】

定理の証明については、生徒の方から大変スムーズに論理的な発言が出された。直線lとmがねじれの位置でない理由は「同一平面γ上にある」ということであり、また、交わらない理由は「それぞれの直線が、平行な平面α、β上にある」ということである。論理的に考えることに対する慣れが、スムーズな発言となって現れたと考えられるのである。



切断面を図示する練習課題(4)に対しても、上述の定理に注意を向けさせることで、右の図のように手順を踏んで図示していくことができた。単元末の復習テストにも練習課題(4)を出題した（そこでは、図Aを別の方向から見た見取図を与えた)が、切断線の平行関係にも注意を払いながら図示できた生徒が62%、平行関係は崩れているものの ある程度の概略が描けた生徒が 20%であった。一般に、本授業のような切断面に対する論理的なアプローチは 生徒の負担が大きいとされるが､それは切断面の学習のところだけを論理的に展開するからであって、こうした危惧は単元全体に論理的な視点を導入することで十分に解消できると考える。

②授業場面8について

【授業概要】

本授業は、授業場面7の発展であり、図示するのがより困難な切断面を考えるというものである。ここでは、次のことを核において展開することにした。すなわち、

(i)平面と平面の交線の求め方・描き方

(ii)平面と直線の交点の求め方・描き方

の2点である。そして、右の練習課題は、授業で提示した問題の一つであり、その時に与えた手がかりは次の3つである。

〔練習課題〕
図Aにおいて、3点L, K, M を通る平面で切断する時の切り口を図示せよ。

まず、点KとLを結ぶ直線をl、立方体の底面をαとし、

(a)「直線lと平面αの交点Aを図示しよう（Aが求まれば、後は切断線が機械的に求まる)」

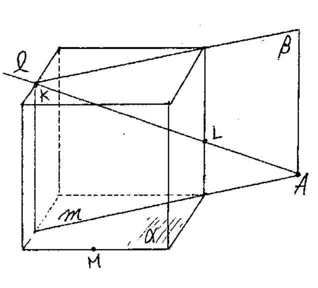
(b)「それには、直線lを含む平面として下図左のようなβという面を考えてみよう」

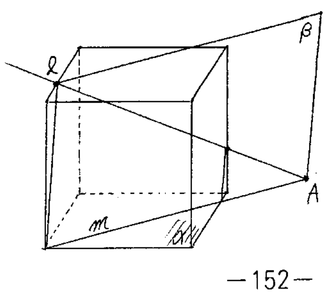
(c)「求めたい点Aは 勿論直線l上にあるが、αとβの交線m上にもある」

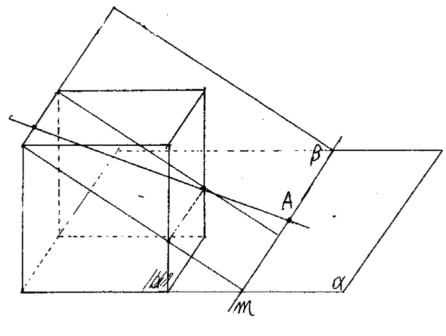
という順で、時間的な間隔もとりつつ指示していった。結果として、これをヒントに半数程度の生徒が点Aを求めることに成功した。そして、できた生徒に黒板で発表させた後、指導者が実物模型でおさらいをし、その後「直線lと平面αの交点Aは、lを含む平面βを考え、αとβの交線mとlとの交点として求められる」ことをまとめた。

次に、平面βは直線lさえ含んでおればよいので、様々な平面βが考えられるという点に注目させた。実践では一つの例として、下図中央に示した平面βを利用して点Aを求めさせることにし、生徒へは、“直線lと点Eを通る平面βを利用してみよう”と投げかけた。

最後は、これ以外の平面βを考えることで点Aを求めさせたところ、生徒からは、下図右の方法などが出てきたので黒板で説明させた。説明を聞く側の生徒も十分理解したようで、黒板を隠して手元のプリントに図示するよう指示したところ、多くの生徒が短時間で出来ていた。







【考察】

本授業の学習は高度な水準にあると思われるが、本稿で述べてきた一連の学習の中に位置づけるならば、多くの生徒にとって十分理解できる内容となることが分かった。しかし、定着率は期待したほどではなく、後に行った復習テストで同一の問題を出したところ、点Aを求められた者は34%、切断面まで求めた者は29%であった。しかし本授業では、図示する上で最低限必要な線のみを描かせるという手法は採らず、常に平面βや時には平面αを広げるなどして一つ一つの作業に論理的な意味づけをしたために、まだこの程度の定着率を保っているのかも知れない。

なお、上図に示した3通りの平面βについては、復習テストの結果を見る限りでは、多くの者が上に示した一番左の図で考えており、右の図、中央の図で考えた者はそれぞれ正答者の34%、2%であった。底面に対して垂直な面の方が考え易いのかも知れない。

③授業場面9について

【授業概要】

この授業場面9は、練習課題（下の枠内参照）の難易度と生徒の実態、さらに選択数学の残り時数に鑑みて、実践を見合わせるのが適当と判断した。ただし、本課題はこの単元全体の最終課題ということもあり、また同時に一つの到達点を示す内容でもあるため、自由課題という形でプリントして配布し、任意に提出させた。

> 次の練習課題を見取図または投影図を用いて解決せよ。
> 《練習課題》①図Aにおいて、DFとKJは交わるか。
> ②平面AEHD上に点Qをとり、DFとQJが交わるようにしたい。
> 点Qの取り得る範囲を図示せよ。

【考察】

課題①については、4名の生徒が正しい答案を提出してきた。4名とも投影図を利用して考えており、内1名は見取図を利用した解き方も示しており、さらに課題②の答案も作ってきていた。その答案も正しいものであり、投影図と見取図の両方の方法で解いていた。

その生徒に感想を聞くと、課題①については投影図を利用する方が簡単であるという。その理由は、直線DF、KJを含む平面をそれぞれ描く必要がなく、また「立面図と平面図における見かけの交点同士を結ぶ直線が、基線と垂直か」を判断するだけなので考えるのも楽だということであった。やはり、原理さえ理解してしまえば、機械的に解ける方法がより使いやすいのである。

しかし、課題②については、まず見取図を利用する方法で解いたという。ここでは、「直線DFと点Jで決まる平面（要するに点D, F, Jを通る平面）を図示し、その平面と立方体の左面AEHDとの交線上に点Qがあればよい」という明確な指針が立てやすかったとのことである。より多くの生徒が、本生徒のように、問題に適した解法を選択できるようにしなければならないであろう。

最後に、授業場面8で「直線と直線の交点の求め方・描き方」にも触れておく方が、より円滑に本授業場面に繋がったであろう事を指摘して、本稿を終えることにする。

《参考文献》　狭間節子編「こうすれば空間図形の学習は変わる」明治図書, 2002
栗田稔「教職数学シリーズ基礎編② 幾何」共立出版株式会社, 1981
アナトリー・サヴィン編、山崎昇監訳「みえる数学の世界2」大竹出版, 2000
大村平「幾何のはなし」日科技連出版社, 1999
真部富男「図面の見方・描き方」工学図書株式会社, 1986
一松信・竹之内脩編「改訂増補 新数学事典」大阪書籍株式会社, 1991

2．立体の重心（第３学年）

坂本宏和
堺市立美原西中学校

１．主題名　　立体の重心

２．空間思考の育成のねらい

身の回りにあるさまざまな事物は安定しているときと不安定なときがある。いすの足は普通３点または４点で支えられ一点でも欠けるとたちまち坐りにくい。「三角形の重心」は三角形が一点で支えられることを示す興味深い平面図形(相似な三角形)の題材であった。一方、三脚で支えられたビデオカメラの位置から鉛直線をひくと、三脚の３点で結ばれた三角形の重心の位置を通る。「立体の重心」をイメージすることで事物の安定、不安定を分析する力が育成される。そのために具体物をもちい、実験・実測などの活動を行っていく。それにより「立体の重心」のイメージをつかむこと、特に積み木を階段状に積み重ねることによって重心の位置がどのように変化するか、という動的なイメージを持つ。あわせて正確な重心の位置を求めるのに式計算という論理的な方法で説明する。そのような力を育成していく。

３．指導目標と指導計画

（１）指導目標

- 「実験用てこ」をもちい、モーメントの考え方が理解できる。
- 実験・実測を通し平面図形の重心を求め、その説明として「三角形の重心」やモーメントの考え方を用いることができる。
- 積み木を階段上に積み重ねることで立体の重心のイメージをつかめられる。
- 最上段と最下段の階段の位置が大きく違う状態を工夫して行ってみる。
- 階段の正確な重心の位置を論理的に説明する。

（２）指導計画（選択・・・全３時間）

第１時　　三角形、平面図形の重心
第２時　　モーメント（つりあい）について、立体の重心（１）
第３時　　立体の重心（２）

４．教材観

旧指導要領の中で「三角形の重心」は平面図形（相似な図形）で学習され、三角形が一点で支えられることに興味を示す生徒が多くいた。ところが現指導要領ではこのような学習がなくなり「相似な三角形」の性質から導かれる不思議さを味わう機会がなくなった。「１点で支える」イメージを平面から立体に広げ空間思考の中の動的イメージを育成すること、「重心の概念」を広い視野から考察すること、そのための具体的な操作を取り入れること、これらのことを本教材から学ばせたい。

5．授業の実際（第２時）

（１）主題名　「モーメントについて」「立体の重心（１）」

（２）本授業の目標
① 「実験用てこ」をもちい、支点からの距離とつるすおもりの重さの関係が説明できる。
② 一定の間隔を保って積み木を階段状に重ね続けた時、これ以上積み上げられない限界のあることが理解できる。

（３）授業の展開

主な学習活動	指導上の留意点
「実験用てこ」（写真①）をもとに、おもりの重さ、支点からの距離の関係を考える。	プリント〔１〕を配布する
＊おもりをつるす位置が支点の左右で各１ヶ所の場合（写真②）	＊一方の端におもりをつるす。次に、反対側のどの位置におもりをつるせば水平につりあうか、を実験で確かめる。
＊おもりをつるす位置が支点の左右でそれぞれ２ヶ所など複数ヵ所の場合（写真③）	＊一方の２ヵ所の位置におもりをつるす。次に反対側のある位置におもりをつるしたが、水平にならない。さらにもう１カ所におもりをつるし水平にしたい。どの位置におもりをつるせばつりあうか、実験で確かめる。
つりあいの実験結果からおもりの重さ、支点からの距離の関係を式で表せる	プリント〔１〕に表された数値から （距離）×（重さ）の総和・・支点の左側 ＝（距離）×（重さ）の総和・・支点の右側 に気づく
何段まで階段上に積み重ねられるか、積み木を用い実験する。 ＊　１ｃｍ、２ｃｍ、３ｃｍ、４ｃｍ、６ｃｍ間隔で積み木を階段状に重ねていく実験をする	プリント〔２〕と積み木（横幅１２ｃｍの直方体）１２枚を配布 ＊　正確に目盛をみながら、積み木を階段状に重ねていく ＊　ぎりぎりで安定している状態、これ以上積み重ねられない状態、をていねいに調べていく（写真④、⑤、⑥）
＊どの位置で支えられているかをイメージする	＊　間隔の長短や段数の違いにより支点の位置が異なっている（移動している）ことに気づく

実験結果から段の間隔、積み木の階段の最大段数の関係を見つける	反比例の関係を発見する 段の間隔が一定の場合支点は横幅（１２cm）を超えることはない

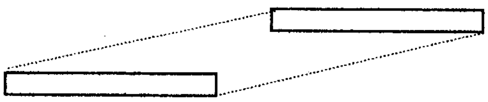
6．授業の実際（第３時）

（１）主題名　　　　「立体の重心（２）」

（２）本授業の目標　① 階段の最上段と最下段の位置が完全に離れている状況をイメージし実際に作る。そのためには重心の考えが必要であることを理解する。

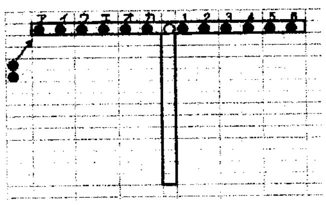
② 計算によって重心の正確な位置が求められる。

（３）授業の展開

主な学習活動	指導上の留意点
前時の積み木問題（一定の間隔で積み木を階段状に重ねていく）で気づいたことを思い出す	積み木を配布し、いくつかの間隔で再確認する
最上段と最下段の位置が完全に離れている状態をイメージする 	等間隔で積み重ねる方法では不可能 積み木の階段の段数の増加にともない支点の位置が移動していることを思い出す
「実験用てこ」の学習（「てこの原理」）を思い出す ＊傾いた状態から水平に保つための工夫を考える	発想の転換をする 積み木を階段状に積み重ねるのではなく、下で支えることができるよう考える。
積み木の階段を順に下に入れ支えていく実験を行う。 各段での限界点をさがす 限界点に印をつける（写真⑦～⑩）	不安定な状態から安定な状態をさがし、その限界点をさがす プリント〔３〕を配布する。 限界点（最上段の端からの最大距離）を求める ２段の場合 ３段の場合 ４段の場合 ５段の場合

限界点の正確な位置を求める方法を考える	
モーメントの考えをもとに限界点を求める式を理解する	プリントに必要な式や数などを記入する
最上段と最下段の位置が完全に離れていることを実感する	段数が５段の時点で０．５ｃｍ完全に最上段と離れていることを知る
立体図形の重心が移動していくことを積み木問題から理解する。	各段での重心の位置をプリント③に記入する
積み木の階段を順に下に入れ支えてみる実験をさらに続けた場合、最上段と最下段の位置が最大どれだけ離れるか、を考える	段数が６段までの最大距離を求める式を通し、規則性を発見する
１＋１/2＋１/3+1/4＋１/5+・・・をイメージする	直方体１個分（１２ｃｍ）が完全に離れてしまう状態・・階段の段数が５段の時 直方体２個分（２４ｃｍ）が完全に離れてしまう状態・・階段の段数が１１段の時

７．授業時配布プリント（概要）

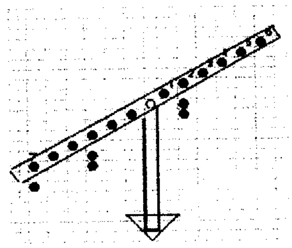


プリント【１】

[1]

てこのアの位置に2gのおもりをつるそうとしました。

（左図の状態）



① １の位置に何ｇのおもりをつるしたら、てこは水平になりますか。

② ２の位置に何ｇのおもりをつるしたら、てこは水平になりますか。

③ ３の位置に何ｇのおもりをつるしたら、てこは水平になりますか。

④ ４の位置に何ｇのおもりをつるしたら、てこは水平になりますか。

⑤ ６の位置に何ｇのおもりをつるしたら、てこは水平になりますか。

[2]

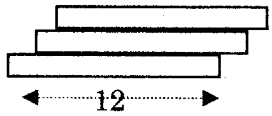
アの位置には１ｇエの位置には２ｇのおもりをつるし、そのあと２の位置に３ｇのおもりをつるしたのが右上図の状態です。１～６（2 以外）のもう一カ所におもりをつるしてこを水平にしようと考えました。どの位置に何ｇのおもりをつるせばよいですか。

[3] [1][2]から気づいたことをいいなさい。

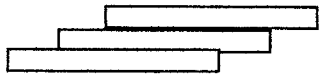
プリント【２】　横の長さが 12cm の長方形の板があります。同じ間隔で階段状に積み重ねていくとき何段まで積み重ねられますか。

(1)1cm 間隔のとき

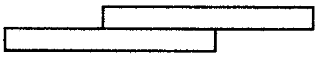
(2)2cm 間隔のとき



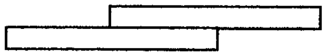
(3)3cm 間隔のとき



(4)4cm 間隔のとき



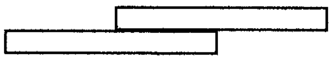
(5)6cm 間隔のとき



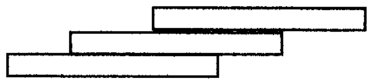
(問)各間隔で積み重ねていったときの最大の状態（これ以上重ねると倒れる）で、立体全体はどの位置で支えられていると考えられますか。赤ペンで記しなさい。

プリント【３】　横の長さが 12cm の長方形の板があります。板を階段状に下に入れて階段の段数を増やそうと思います。最大何 cm まで距離をとって支えることができますか。

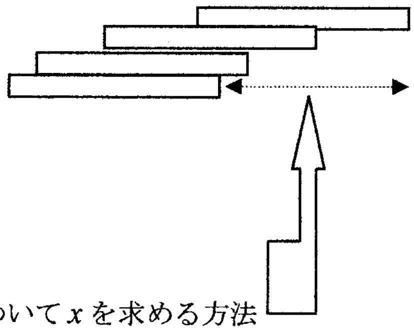
(1)2 枚目を下に入れていくときの限界点



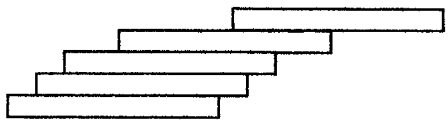
(2)3 枚目を下に入れていくときの限界点



(3)4 枚目を下に入れていくときの限界点



(4)5 枚目を下に入れていくときの限界点



(3)について x を求める方法

それぞれの板の重心の位置は 4 枚目の右端を基準にすると

1 枚目…x －□　　　　…①

2 枚目…x －□－□　　　…②

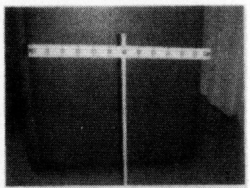
3 枚目…x －□－□－□　　…③

よって 3 枚を合わせた重心の位置は①②③の平均で求まる。

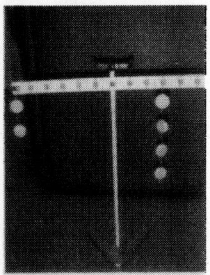
$$\frac{1}{3}\times\left(x-\square+x-\square+x-\square\right)=0$$

$$x=$$

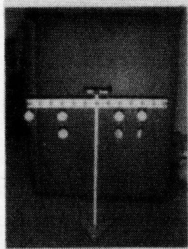
写真①



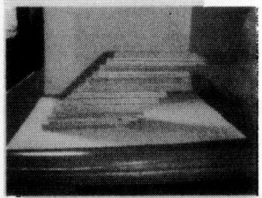
②



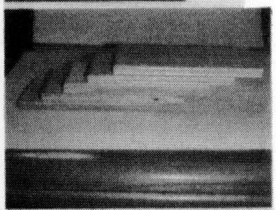
③



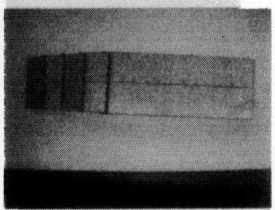
④



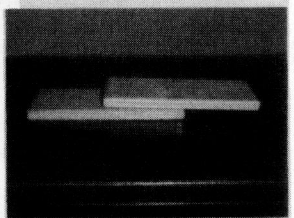
⑤



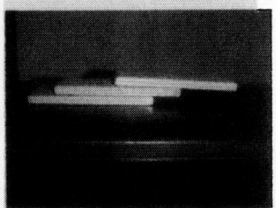
⑥



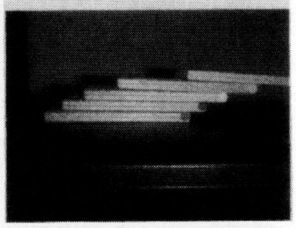
⑦



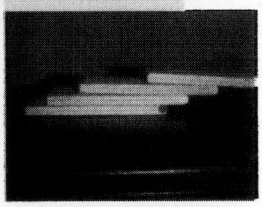
⑧



⑨



⑩



8．授業後の考察

生徒たちは立体図形に重心が存在することに興味を示した。特に実験・実測により空間思考で育成したい重心の動的イメージが深められた。

また、重心の正確な位置を求める方法を考える過程で事物を分析する力を育成する面を持てた。その中でモーメントの考えを用い方程式の有用性に気づく学習機会になった。

ただモーメントの理解や、式計算に取り組む時間が不足し、３時間では不十分さを残してしまった。