3．球面上の図形

―平面上の図形との対比を通して―

中　西　正　治
堺市立さつき野中学校

1．単元名
球面上の図形

2．空間思考の育成のねらい

空間における図形の性質は、その図形が存在する空間に依存する。このことの認識は、空間思考を行う上で極めて重要なことである。そのため、本単元では、球面上の図形と平面上の図形を対比的に位置づける。

小学校以来、平面における図形の性質を学習しているが、それらの性質には平面だからいえること、平面でなくてもいえることがある。例えば、「三角形の内角の和が 180°である」ことは、平面であるという条件のもとで成り立っているが、「1 つの直線に対して垂線がかける」ことは、球面でもいえる。生徒は、平面という条件を意識して、平面における図形の性質を理解していることは少ない。このことは、平面の図形の性質の認識が本質的に育成されていないことを示している。本単元は、これまで平面幾何で学習してきた基本的な図形の性質が、球面においても成り立つかどうかを調べることを通して、平面空間を本質的に認識できるようにすることを目的とする。方法として、念頭操作や実験・実測などの具体的操作活動を重視する。この学習活動を通して、定義は物事を考えていく基礎であり、その定義をどの空間で考えるかによって空間における図形の性質が決まるということ、すなわち論証および空間認識の基本的理解を期待する。

3．空間図形を育成するための指導内容

授業では、以下の 5 点の内容を指導する。

① 2 点を決めれば直線は決まることがわかり、球面においては大円になること
② 2 直線の交点は、平面においては 1 点であり、球面においては 2 点で交わること
③ 平面においては平行線が存在し、球面においては平行線が存在しないこと
④ 2 直線に共通する垂線は、一般的に平面では存在しないが、球面では必ず存在すること
⑤ 平面における三角形の内角の和は 180°であり、球面における三角形の内角の和は 180°より大きく 540°より小さいこと

4．指導計画（全 6 時間）

指導の流れを大きく 3 つに分け、それらを展開Ⅰ（本単元全体に関わる導入）、展開Ⅱ（点と直線に関わる指導領域）、展開Ⅲ（三角形に関わる指導領域）とした。これらの 3 つの展開の指導内容は以下のようである。またこの授業は選択授業で行われる。指導時間は校時

の5限目・6限目と続いているため、それを1回分とし、全部で3回分とした。

展開Ⅰ〔導入〕 展開Ⅱ〔点・直線〕 　直線 　2直線の交点の数	第一・二時［第一回目］
平行線 　垂直・垂線 展開Ⅲ〔三角形〕	第三・四時［第二回目］
3直線で作られる領域（本時） 　直角三角形（本時） 　三角形の内角の和	第五・六時［第三回目］

5．使用教具　ワークシート（プリント）9枚（内容は資料参照）、プラスチック製の球面模型（外径 16.8cm）、ホワイトボード用カラーペン、淵のついた柔らかい塩化ビニール製の半球（内径 17cm、授業では直線ハットと呼ぶ）

6．対象生徒　1年生2人、2年2人、3年2人（計6人）

7．これまでの授業の流れ

これまでに、［プリント 1］から［プリント 7］の学習で、平面と球面における直線、2直線の交点の数、平行線、垂直・垂線について学習をしている。すでに、以下のことをまとめとして確認している。

［プリント1］北極がねぐらだったので白熊であること。

［プリント 2］直線は、平面においては左右に延びるが、球面においては一周してつながる大円となること。大円で切るとその切断面は球の中心を通ること。大円は無数あること。

［プリント3］2直線でできる交点の数は、平面では1つ、球面では2つあること。その2つの交点は球の中心に対して反対側であり、この関係をもつ2つの点を対極点ということ。

［プリント4］平行線は、平面では存在するが球面では存在しないこと。

［プリント5］赤道と経線が90°で交わることを利用して、垂直な2直線がかけること。

［プリント6］垂直・垂線について、平面では、2直線が平行のときは共通な垂線が存在するが、2直線が平行でないときは存在しない。球面では、2つの大円に共通な垂線が必ず存在すること。

［プリント7］3直線が作る領域の数は、平面では7、6、4の3通り、球面では8，6の2通りあること。

8．本時の指導計画

3直線で作られる領域の授業は、2回目（2004.12.7）の後半から3回目（2005.1.25）にかけて行なわれた。本時の指導計画は［プリント7］の指導計画から載せることとする。

展開Ⅲ〔三角形〕	・[プリント 7] の(問 1)の問題を確認する。 ・予想を立てる。 　予想を発表する。 ・実際にプリントに作図し予想した自分の領域の数を確認する。自分にない直線の引き方についても確認する。 ・(問 2)の問題を確認する。 ・予想を立てる。 ・予想を発表する。 ・実際に、球面模型の予想した自分の作図を行い領域の数を確認する。 　自分にない直線の引き方についても確認する。 　対称性と合同性と領域の数の関係について考え説明する。 ・学習内容を確認しプリントにまとめる。	[プリント 7] を配る。 ・問題の意味を確認する。 ・予想を立てさせ、発表させる。 　3 本の直線の引き方によって領域の数は異なるので、生徒の 3 本の直線の引き方に注意を払い、場合わけを行い、整理をする。 ・実際に予想した図をかかせて確認する。 ・問題の意味を確認する。 ・予想を立てさせ、発表させる。 　3 本の直線の引き方によって領域の数は異なるので、生徒の 3 本の直線の引き方に注意を払い、場合わけを行い、整理をする。 ・実際に予想した図をかかせて確認する。 　作られる領域は、球の中心に対して対称であること(合同な図形の位置関係)を考えさせる。視覚的に確認する。 ・まとめを行なう。
	・[プリント 8] の(問 1)の問題を確認する。 ・予想を発表する。 ・実際にかき確認する。 「なぜ 1 つしかかけないか」を考える。	[プリント 8] を配る。 ・問題の意味を確認する。 ・答えを予想させる。 ・実際にかかせて確認する。 　これまでの学習経験から 1 つしかかけないことは、当然のこととして理解している。しかし、その理由は考えてきたことがない。「なぜ 1 つしかかけないか」の問いは既習の直角三角形に対する振り返りと共に、90°、180°という角度に目をつけて考える(問 2)の複線にもなっている。 　もし、直角を 2 つ持つならば、三角形の内角の和は 180°より大きくなり、平面における三角形の内角の和が 180°であるこ

		とと矛盾するから、直角が 1 つの三角形しかかけないことを確認する。ただ、このような考え方はこれまで行ってきたことがないため、答えられない可能性が高い。そのときは教師より説明を行う。
	・(問 2) の問題を確認する。	・問題の意味を確認する。
	・予想を発表する。	・答えを予想させる。 答えが複数あるので、整理をおこなう。
	・実際に球面模型に予想した図をかき確認する。	・実際に球面模型にかかせて確認する。
	どのような点に注意してかいたのかを発表する。	・どのような点に注意してかいたのかを発表させる。 3 通り（直角を 1 つまたは 2 つまたは 3 つ持つ三角形）すべてをかいていなければ、かいた図形を他の生徒に説明させ、参考にする。
	自分がかいていない図形をかく。	もし、生徒がかいていない図形があれば、球面上にその三角形をかかせる。
	・学習内容を確認しプリントにまとめる。	・まとめを行なう。

9．実際に行なわれた授業

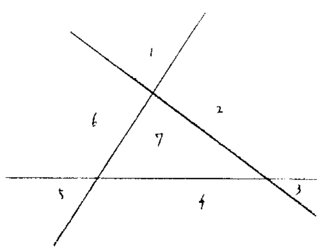
以下が、実際に行われた授業の様子の概略である。授業の流れを作っていった生徒の発言や活動およびそれに対する教師の示唆や他の生徒の反応を中心にかいている。

1 年生の 2 人を 1a、1b、2 年生の 2 人を 2a、2b、3 年生 2 人を 3a、3b とする。(まとめ) は、教師の授業のまとめを生徒が板書したものである。

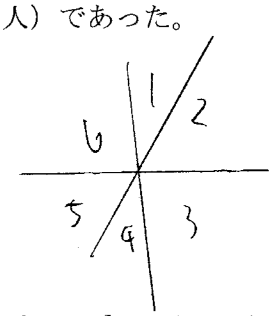
[第二回目] (2004.12.7) の後半から

[プリント 7]

(問 1) 最初に出た分け方は、次の 2 通り（5 人、1 人）であった。

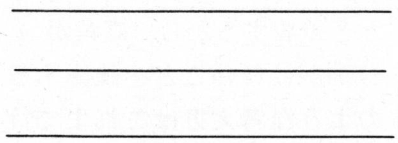


[図 7-1] 1a,1b,2a,2b,3a がかいた図

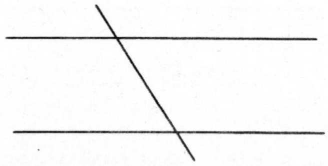


[図 7-2] 3b がかいた図

そこで、次のような分け方もあることを説明した。



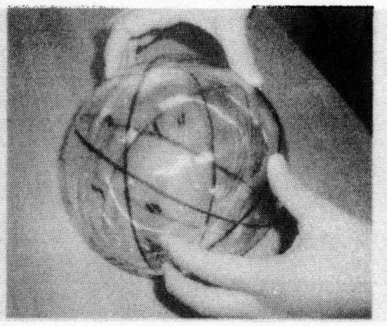
[図 7-3]



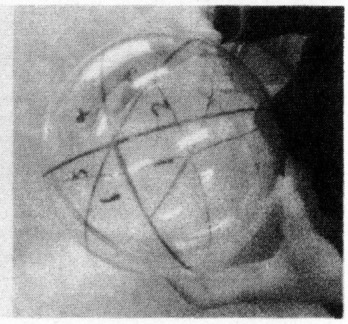
[図 7-4]

（問 2）球面は、容易に領域に分けることができた。

[図 7-5]



[図 7-6]

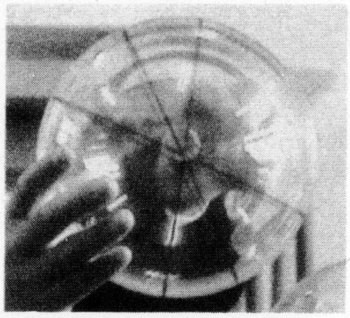


[図 7-7]

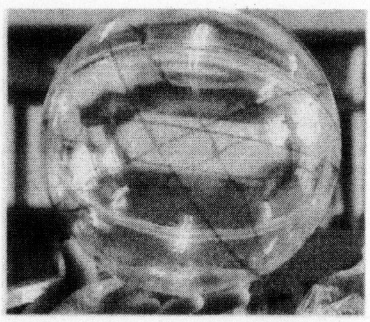
（まとめ）平面では 7、6、4 の 3 通りあるが、球面では 8，6 の 2 通りである。

［第三回目］（2005.1.25）

前回の復習を兼ねて、3 本の直線を引き三角形を作ることから始めた。前回確認した 2 種類（8，6 の 2 通り）が再びでた。新しくできた面に番号をかかせ面の数を確認した。



[図 7-8] 3b,2b がかいた図



[図 7-9] 1b,1a,2a,3a がかいた図

次に、反対側に同じ形があることを意識させるため、作った面の中で、同じ面の形のところに同じ色を付けさせた。3b は、8 つの面を作ってはいたが、その中の 6 つの面が互い違いに同じ形が並んでいるようにかいたため、2 つのグループに分かれてしまっていた。

また 6 つの面のとり方は、8 つの面のとり方の特殊型であることを確認した。

しかしこの段階では、まだ球の対称性を認識していないと判断し、その指導の準備として適度な大きさの三角形をかかせ、その中の 1 つの三角形に注目させた。その三角形の異なる 3 つの角度に異なる記号（○、△、×）を、同じ角度には同じ記号をつるよう指示した。しかし、その三角形と反対側にできる三角形が合同であることに気づいていない様子だったので、反対側の三角形に同じ角度があるのではないかという示唆を行った。するとすぐさま、1a から「反対側にできる三角形は同じ面積である」という発言が返ってきた。

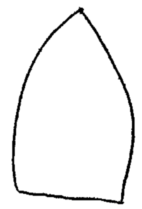
一方 3b は、内角の和が 180°を越えていることに気づき、「ここにできている三角形は三角形ではない」と、強い口調で主張した。この意見は重要な意見と考え、後でじっくり扱うこととし、とりあえず、同じ角度に同じ記号をつけさせることに集中し、全員正しく記号がつけられているかの確認を行った。

次は長さについて確認を行なった。同じ長さには同じ記号をつけるように指示し、教師指導型で行なった。そして最初に対象とした三角形と反対側にできる三角形は長さ角度ともに同じだから、反対側にできる三角形とは合同になることを確認した。この確認は先程の 1a の意見である「反対側にできる三角形が同じ面積である」を裏付けるためのものでもあった。さらに対象としなかった残りの三角形に関しても、それぞれ反対側にできる三角形とは合同であることを、異なる色を塗ることによって確認した。この 2 つの三角形の対称性は、後に行なう三角形の内角の和が 180°以上であるという証明の理解に重要な役割を果たすことになる。

（まとめ）8 つの領域ができる。反対側にひっくり返ってぴったり重なる 1 組の三角形ができる。形・面積が同じ三角形が 4 組できる。

ここで先程の 3b の発言「ここにできている三角形は三角形ではない」を取り上げた。

再度 3b に先程の発言について尋ねると、「三角形ではない。平面にすると三角形にならない、かけない。180 度にならない」といい、球面にできる三角形を三角形として受け入れがたいものとして捉えていた。
すると 1a より、[図 7-10]が示された。



[図 7-10] 1a がかいた図

教師側から、考えるべき方向を示すために、「これ（1a がかいた三角形）が三角形かどうかを考えればよいことになる」と、生徒の意見をまとめた。そしてこのことを解決するためには、「三角形とは何か」という定義に立ち戻る必要があることを確認した。

そして生徒に「三角形とは何か」と尋ねると、「内角の和が 180°である」「辺が 3 つある」「頂点が 3 つある」という答えが返ってきた。生徒は定義と性質の区別がついていない。そこで「小学校のとき最初三角形とはどんな形と習いましたか」といい直した。しかし生徒はそのことを忘れていて応えられなかったので、今度は「三角形をかきましょうといわれたら、小学校のときはどのようにしましたか」と誘導的な質問に切り換えた。すると、3 つの線をかいて作ったという内容の発言が返ってきた。その発言を捉えて、三角形の定義—3 直線で囲まれた図形を三角形という—を確認した。それでも 3b は「(球面にできる直線は）曲がっているから直線でない」といい、球面にできている三角形は三角形とは認められないと主張した。この主張に対して教師は、大円を直線と見ることに納得していないからだと判断し、三角形を構成している直線について、「結局は三角形を作っている直線が

問題になってくるね」と考えるべき方向を示唆した。そして、「直線とは何か」という定義に関わる質問をした。この質問に対しては、3b も含め全員が、直線は 2 点を最短距離で結ぶ線であることは認めた。この承認から、球面にできる最短距離は大円になるから、球面における大円を直線と考えなければならないことを再確認した。このように、順序立てて考えていくと、三角形の定義から、球面に作られた形は三角形であると認めなければならないと説明した。しぶしぶ 3b は、球面にできた三角形を三角形と認めたものの、それでも 3b は「許されへん」と不満げであった。3b の「許されへん」という発言は、最初の認識が極めて深く印象に残り、後の概念形成に大きな影響を及ぼしていることを示している。

その後は、先ほどの定義と性質の混同について整理を行った。

（まとめ）三角形の定義：3 つの直線で囲まれた図形

三角形って何？

内角の和が 180°（性質）

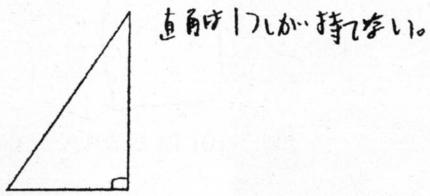
辺が 3 つある（性質）

頂点が 3 つある（性質）

この活動を通して、「三角形とは何か」を考えるためには、さらにそのもととなる「直線とは何か」を考えなければならないという経験した。この論証の考え方は、具体的操作活動の中で創発された内発的動機によるものであって、生徒は自らの課題やその課題を解決するための方法を捉えていくことができた。具体的操作活動の重要性が認められる。

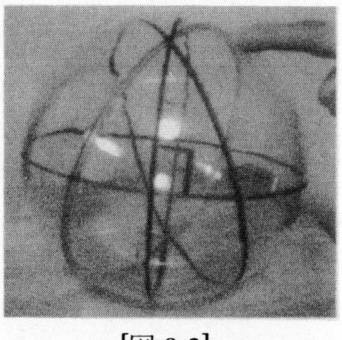
[プリント 8]

（問 1）1 通りしかないことはすぐさま理解した。

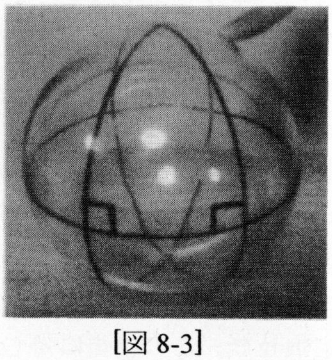


[図 8-1]3a がかいた図

（問 2）球面では、まず以下に示す 2 通り（直角が 1 つ、直角が 2 つ）が出た。



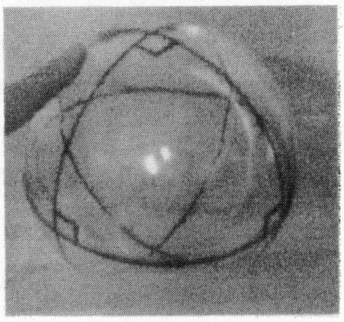
[図 8-2]



[図 8-3]

直角が 3 つできる場合がなかったので、教師のほうからその場合を考えることを指示し

た。最初はできないと思っていた生徒もしばらくしてかくことができた[図 8-4]。



[図 8-4]

次の時間の予告として、直角が 1 つの場合を利用して三角形の和が 180°より大きくなること、直角が 3 つある場合を利用して三角形の和が 270°より大きくなり 540°より小さくなるらしいことを軽く触れておいた。

（まとめ）平面では直角は 1 つしかない。球面では直角が 1 つ、2 つ、3 つの場合がある。

3b の意見（こだわり）によって、この第 3 回目の授業は、「三角形とは何か」、「直線とは何か」という図形の認識に関わる重要な思考を可能にし、論証や空間概念の基本に大きく関わった。しかし、この授業を保障するために、予定されていた時間数はオーバーを余儀なくされ、第 4 回目の授業が必要となった。

10. 考察と提案

本時の授業で、以下のことが明らかになった。

・生徒が最初に学習した概念は、きわめて強い固定観念となること。

3b は、球面にできた三角形を三角形と認めたものの、それでも 3b の「許されへん」という発言は、最初の認識が極めて深く印象に残り、後の概念形成に大きな影響を及ぼしていることを示している。また、授業後の生徒 2b の感想においても「平面なら絶対 180°になるのに、球面だと 180°よりも大きいことに驚きました。私の中での三角形は（△← こういうもの）という固定観念があったので、この選択授業で三角形というものの世界が広がったような気がします。」と書いている。このような思いを持ったことは、それだけに生徒にとって得るものが大きかったといえる。

・念頭操作が難しくなってくると球面模型を使い、その球面上に思考している図をかき込む具体的操作活動へと移っていくこと。

・具体的操作活動を行い、自分の考えを一定まとめられた後は、球面上にかかれた特殊な場合だけでなく一般的な場合も想定し、再び念頭操作で考えていること。

・念頭操作や実験・実測などの具体的操作活動を行うことによって、その活動に伴う疑問や葛藤、教師や他の生徒からの説明を受けての考え直しなどの様々な思考ができるようになること。

3b が、内角の和が 180°を越えていることに気づき、「ここにできている三角形は三角形ではない」といった主張は、まさに具体的操作活動からであった。

・定義は物事を考えていく基礎であり、その定義をどの空間で考えるかによって空間の図形の性質が決まるということを学んだこと。

三角形について考える場合、まずその定義がどのようなものかを調べなければならないこと、それを理解するためにはさらに、三角形の定義にある直線の定義を調べなければならないことを体験した。この筋道こそ論証の基本である。

・球面上の図形を考える活動を通して始めて、これまで学習してきた平面幾何の基本的な図形の性質―特に直線と三角形―を深く認識できるようになったこと。

この授業は図形に関する授業を終えた後の中学 3 年で行うのが効果的であると考える。1・2 年ではまだ平面上の図形についてあまり深く練られていない。論証や図形の性質を一定学習してきた中学 3 年生は多面的に考えられ、授業が一層豊富になる。

資料（ワークシート）(1)

展開Ⅰ〔本単元全体に関わる導入〕

［プリント 1］

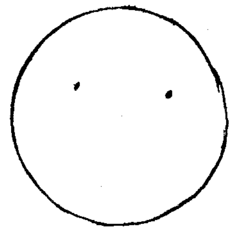
熊は何色ですか？

あなたは、つぎのなぞなぞに出会ったことがありませんか。挑戦してみよう。
1 頭の熊がねぐらを出発して、100 キロメートル南に歩きます。
休憩した後、西に向きを変えて真っ直ぐ 100 キロメートル歩きます。
その後再び向きを変えて、北に向かいます。
驚いたことに、熊は元のねぐらに戻ることがわかりました。
この熊は何色ですか？

展開Ⅱ〔点・直線〕

［プリント 2］

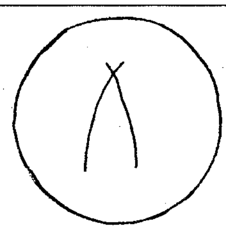
球面上に直線を引くことができますか？



平面上でも、球面上でも、点は最も単純な形です。
（問 1）平面上の 2 点を結ぶ最も単純で最短の道をかきなさい。
（問 2）球面上の 2 点を結ぶ最も単純で最短の道をかきなさい。
（問 3）これらの 2 つの道を延長すると、それぞれどんな形になるか、述べなさい

［プリント 3］

2 直線は共通点をいくつもつことができますか？



平面上で、または球面上で、異なる 2 直線が交わるとき、それらは
1 点以上で出会う。
（問 1）平面上の 2 直線の交点を調べなさい。
（問 2）球面上の 2 つの大円の交点を調べなさい。

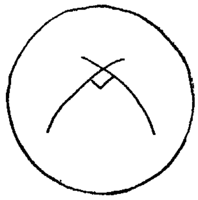
［プリント 4］

平行線を考えてみよう。

（問 1）平面上で平行線を考えてみよう。
（問 2）球面上で平行線を考えてみよう。

［プリント 5］

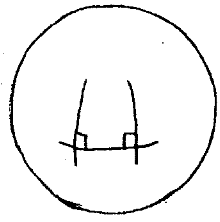
球面上で、垂直な直線はどのようになっていますか？



平面上で、および球面上で、垂直な直線を調べなさい。
（問 1）平面上で垂直な 2 直線を作図しなさい。
（問 2）球面上で垂直な 2 直線を作図しなさい。

［プリント 6］

2 直線のどちらにも垂直な直線は何本ありますか？

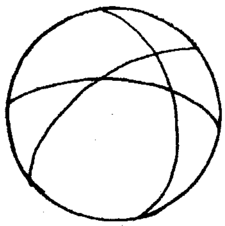


ある直線が他の 2 直線のどちらにも垂直ならば、その直線はそれらの 2 直線に共通な**垂線**です。
（問 1）平面上で、2 直線に共通な垂線を調べなさい。
（問 2）球面上で、2 つの大円に共通な垂線を調べなさい。

展開Ⅲ〔三角形〕

［プリント 7］

3 つの直線が交わるとき、どんな領域をつくることができますか？



（問 1）平面上で、3 直線によってできる領域を調べなさい。
平面をいくつの領域に分けますか？
（問 2）球面上で、3 つの大円によってできる領域を調べなさい。
球面をいくつの領域に分けますか？

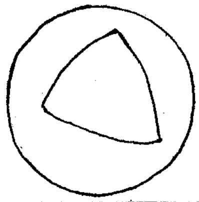
［プリント 8］

三角形は直角を一つ以上もつことができますか？

あなたは直角三角形の性質をすでに学習しました。
（問 1）平面上で、直角を一つ以上もつような三角形を構成できますか。調べなさい。
（問 2）球面上で、直角を一つ以上もつような三角形を構成できますか。調べなさい。

［プリント 9］

三角形の内角の和はいくらですか？



三角形の内角の和は、いつも同じですか？
（問 1）平面三角形の内角の和を調べなさい。
（問 2）球面三角形の内角の和を調べなさい。

［引用・参考文献］

（1）この授業で使用したワークシート（プリント）の課題は、以下に示す文献に載っている問題を引用し、それに修正を加えたものである。

István Lénárt (1996). Non-Euclidean Adventures on the Lénárt Sphere : Investigations in Planer and Spherical Geometry. Key Curriculum Press