

### 3. 高等学校

# 1. 球面上の図形（第3学年）

田中正男

大阪府立西淀川高等学校

## 1. はじめに

高等学校では現在、球についての学習は大まかに、①表面積、体積（数学Ⅰでは、表面積、体積の公式、数学Ⅲでは、積分を利用）、②球（球面）の方程式（数学Ⅱでは、ベクトルを利用）についてである。しかし、球そのものに関する学習内容はあまり多くなく、②などは教科書によっては扱っていない場合もある。

したがってここでは、球（球面）の方程式や積分の視点から観た球についてなどの従来からの内容を扱うとともに、エンリッチメントの内容として、新たに「球面上の図形」について、「平面上の図形」と対比させながら指導することを念頭においた授業を構想するにあたり、以下の点についてヒントを得ることを目的に授業を試みた。そのため、第3学年に授業を設定した。

- ・「球面上の図形」は指導内容（生徒にとっては学習内容）として妥当であるのか——について
- ・「球面上の図形」を意識して学習することを通して、「平面上の図形」を今まで以上にクリアーに認識できるようになるのか——について
- ・「球面上の図形」の性質を知ることにより、新しく面白い世界が広がっていくと感じられるかどうか——について
- ・指導法について
- ・評価法について

## 2. 空間思考育成の視座からの授業のねらい

### (1) 育成する空間思考

この授業で育成しようとする空間思考としては、次のものが考えられる。

- ・プラスチック製の透明半球を2個組み合わせでできた球面の模型を使った観察や実際的な操作を通じて、球面上の図形を分析すること。
- ・定義から出発して、既に学習した直線、三角形、円、角度などに関する数学的知識を活用し、球面上の図形の特徴や成り立つ性質や関係を発見すること。
- ・発見した性質や関係を言語、記号、式などを使い説明すること。
- ・平面上の図形と球面上の図形についての共通性、類似性、差異を理解すること。

### (2) 教材観

高等学校の数学においては、平面上の図形としての円については、その定義からはじまって、三角形と円との関係、2つの円の関係、円周角と中心角との関係、等を初等幾何学

的観点から扱っている。さらに、円の方程式やベクトルで表現することを通じて円についての性質を調べる。それに対し、球については、ベクトル方程式による表現と円の回転体として積分を用いて体積を求める場面で、軽く扱うことになっている。

ここでは、①「球になれる」と題して、高3までに学習した球についての、定義、イメージ、性質について、絶えず平面図形である円と対比させながら、球の模型を触りながら互いに関連づけることからスタートする。

その後、②「球面上の図形」として、2点間の距離、直線（大円）等、図形を分析するための基本的な性質について、「平面上」と「球面上」との違いについて、模型を使った生徒による発見にもとづきまとめる。

さらに、③「球面上の三角形の性質」として、三角形の合同、相似、面積について、平面上の三角形の場合との違いを意識しながら学習できるように配慮した。

この学習により、

- ・平面上の図形にのみ成り立つ性質
- ・平面上の図形、球面上の図形のどちらにも成り立つ性質
- ・球面上の図形にのみ成り立つ性質

があることに気づき、平面について認識を新たにするとともに、今まで知らなかった新しい世界があることを知り、新しくて面白い世界が広がっていくと生徒が感じられるようになることをねらいとしている。

### 3. 授業について

(1) 対象生徒 第3学年生徒（男子12名、女子5名の計17名）

(2) 指導計画（全6時間）

全6時間の指導内容と配当時間は以下のとおりである。本稿においては、②の2時間（第1時、第2時と記す）の授業を紹介し、そこでの学習活動と生徒の反応について分析を試みることにする。

- |                               |         |
|-------------------------------|---------|
| ① 球になれる（2時間）                  |         |
| ・球の定義                         |         |
| ・回転体としての球                     |         |
| ・積分的視点から観た球について               |         |
| ・2つの球の交わり                     |         |
| ・3つの球の交わり                     |         |
| ② 球面上の図形（2時間）                 |         |
| ・球面上の直線（大円）の性質、線分、2点間の距離……第1時 |         |
| ・球面上の三角形 ……第2時                |         |
| ③ 球面上の三角形の性質（2時間）             |         |
| ・三角形の面積                       | } ……第3時 |
| ・三角形の合同                       |         |
| ・三角形の相似                       |         |

#### 4. 授業の実際：テーマ「球面上の図形」

##### (1) 課題に関連する生徒の活動目標

###### ① 課題

- ・球面上の直線（大円）の性質について、平面上の直線の性質と比較しながら、探究し、整理する。
- ・球面上の線分について理解し、2点間の最短距離の求め方を考える。
- ・球面上の三角形について成り立つ性質について調べる。

###### ② 生徒の活動目標

- ・プラスチック製の透明半球を2個組み合わせてできる球面模型に大円を描いたり角度を測るなどの活動（実験・実測）を通して、既知の数学の知識を拠り所にして、球面上の図形を分析し平面図形と対比させて考えることができる。
- ・論理的推論の力を借りて、正しい判断をし、そうして得られた情報を関連づけることができる。
- ・図などを用いて適切に表現し、説明や伝達をすることができる。
- ・数学的表現に持ち込み、2点間の最短距離を求めることができる。

###### ③ 評価の方法

- ・生徒が球面模型に実際にマーカーで描いた図形などを点検する。
- ・生徒がプリントに描いた説明図、言葉による表現、数式などを点検する。
- ・生徒の発言・説明を分析する。

##### (2) 学習活動の流れ

###### ① 第1時：球面上の直線（大円）の性質、線分、2点間の距離

授業形態：グループ学習（4人の班が3、5人の班が1）

使用教具：プラスチック製透明半球（2個を組み合わせると球面になる）、エッジつき透明半球（以下ハットと呼ぶ）、黒、青、赤のマーカー  
球面分度器（球面上で角度を測定する道具）

学 習 活 動	生 徒 の 反 応
<p>1. 球面上に任意の2点をとって、マーカーを使い線で結ぶ。</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>・4つの班の生徒たちは、比較的近い2点（一目瞭然に見渡せる位置）をとる。<sup>(1)</sup></li> <li>・1つの班の生徒たちは、比較的遠い2点をとる。<sup>(2)</sup></li> <li>・たいていの生徒は、フリーハンドで2点を結ぶ。</li> </ul>
<div style="border: 1px solid black; padding: 5px;"> <ul style="list-style-type: none"> <li>・線を引くとき意識したことなどを出し合う。</li> <li>・線を引くときの苦労、工夫などを出し合う。</li> </ul> </div>	<p>「できるだけま上から見て、まっすぐになるようにするのに苦労した」という声あがる。<sup>(3)</sup></p>

<p>2. (7)(1)の2通りの線の引き方の違いを考える。</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>・「(7)の方が実際にかきやすい。」</li> <li>・「(1)はめっちゃかくのがむずかしいで。」</li> </ul>
<div style="border: 1px solid black; padding: 5px;"> <ul style="list-style-type: none"> <li>・(7)として2点間の最短距離を結んだものを見せる。</li> <li>・(1)として地球儀の緯線のように2点を結んだものを見せる。</li> </ul> </div>	<ul style="list-style-type: none"> <li>・(7)が(1)より短いことに気づく生徒が現れる。</li> </ul>
<p>3. ハットを使い、球面上の2点を結ぶ最短距離を結んだ線について探究する。</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>・「(7)の方が短いからかきやすいと思う。」<sup>(4)</sup></li> </ul>
<div style="border: 1px solid black; padding: 5px;"> <ul style="list-style-type: none"> <li>・自分の班のかいた線が、最短距離を結んだ線であるか、またはそれに近いかどうかを確かめる。</li> <li>・この線を延長すると、どんな形になるかを確かめる。</li> </ul> </div>	
<p>4. 球面上の2点間の最短距離についてまとめる。</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>・ハットのエッジ上に2点を合わせることで確認する。すべての班の描いた線が殆ど最短距離を結んだ線に一致している。<sup>(5)</sup></li> </ul>
<div style="border: 1px solid black; padding: 5px;"> <ul style="list-style-type: none"> <li>・大円の定義</li> <li>・球面上の2点間の距離は、大円にそった長さになる。</li> <li>・球面上の2点間の距離を求める方法を考える。</li> </ul> </div>	<ul style="list-style-type: none"> <li>・新たに球面上にいくつかの点を描き、ハットを用いて色の異なるマーカーで、実際に2点を結び、線を延長する。</li> </ul>
<div style="border: 1px solid black; padding: 5px;"> <ul style="list-style-type: none"> <li>・2点間の距離の求め方を説明。</li> <li>・2点間の距離を求める練習。</li> </ul> </div>	<ul style="list-style-type: none"> <li>・「どの2点を結んでも大円になる。」</li> <li>・2点間の距離については円周の一部だから、円周の一部(弧)の長さを求めるのと同じであることに気づいた生徒が2名が、この旨発言する。<sup>(6)</sup></li> </ul>
<div style="border: 1px solid black; padding: 5px;"> <ul style="list-style-type: none"> <li>・2点間の距離の求め方を説明。</li> <li>・2点間の距離を求める練習。</li> </ul> </div>	<ul style="list-style-type: none"> <li>・プリントの練習問題を解く。<sup>(7)</sup></li> <li>・答え合わせ。</li> </ul>

② 第2時：球面上の三角形

授業形態：グループ学習（4人の班が3、5人の班が1）

使用教具：プラスチック製透明半球（2個を組み合わせると球面になる）、エッジつき透明半球（以下ハットと呼ぶ）、黒、青、赤のマーカー

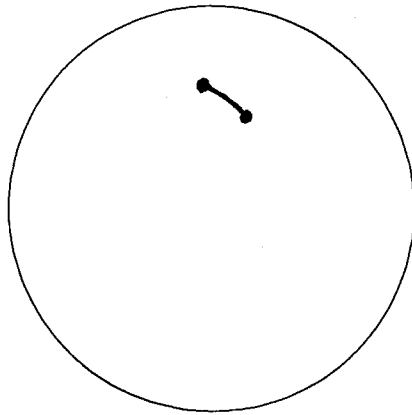
球面分度器（球面上で角度を測定する道具）

学 習 活 動	生 徒 の 反 応
1. 平面上における三角形についてふり返る。 2. 球面上の三角形を考える。	<ul style="list-style-type: none"> <li>・「3つの点を結んでできる。」<sup>(8)</sup></li> <li>・「辺が3つある。」</li> <li>・「面積が求められる。」</li> <li>・「角がある。」</li> </ul>
<div style="border: 1px solid black; padding: 5px;">                         ・三角形として認めるかどうかについて議論する。                     </div>	
3. 三角形ができる場合とできない場合について考える。	<ul style="list-style-type: none"> <li>・図のような3点を結んだものを見せた場合、ほとんどの生徒は「三角形」と呼ぶ。<sup>(9)</sup></li> <li>・しっかりと三角形の定義を意識してはいない。</li> <li>・「何となく三角形っぽいから」のような反応。</li> </ul>
<div style="border: 1px solid black; padding: 5px;">                         ・球面模型を使い、三角形ができないのはどんなときか考える。                     </div>	<ul style="list-style-type: none"> <li>・3点とも同一の大円の周上にあるときは三角形ができないことを発見したグループが3グループ。<sup>(10)</sup></li> </ul>
<div style="border: 1px solid black; padding: 5px;">                         ・2点が極点の場合も三角形はできないことについて模型で説明し、生徒も模型にマーカーで線を引きながら確認する。                     </div>	<ul style="list-style-type: none"> <li>・球面模型にマーカーで点をかき、それらを、ハットを使い線で結び、でき上がった図形を見て「2点が極点」の場合について確認。<sup>(11)</sup></li> </ul>
4. 三角形の内角の和について考える。	
<div style="border: 1px solid black; padding: 5px;">                         ・平面上の三角形の内角の和は <math>180^\circ</math> であることを確認する。                          ・「球面上の三角形の内角の和は <math>180^\circ</math> である」という命題は真か偽かを考える。<sup>(12)</sup> </div>	<ul style="list-style-type: none"> <li>・球面模型にマーカーで点をかき、それらを、ハットを使い結び三角形を描く。</li> <li>・球面分度器で角度を測定。</li> <li>・予想する。</li> </ul>
	<ul style="list-style-type: none"> <li>・「<math>180^\circ</math> にならないみたい…」</li> </ul>
<div style="border: 1px solid black; padding: 5px;">                         ・命題の反例を見つける。                     </div>	<ul style="list-style-type: none"> <li>・1つでも成り立たない例（反例）があれば命題は偽であることを復習。<sup>(13)</sup></li> </ul>
・まとめ	<ul style="list-style-type: none"> <li>・反例を見つけようとする。</li> <li>・1グループが3つの内角がすべて <math>90^\circ</math> の三角形が存在することを発見。</li> <li>・最後に平面上の三角形との違いをまとめる。</li> </ul>

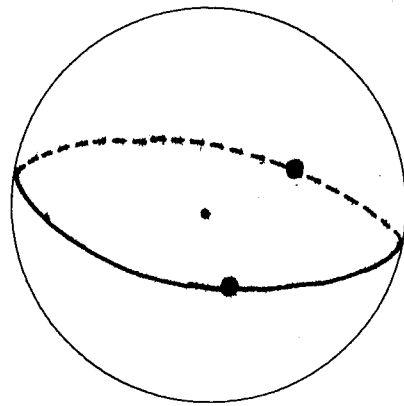
### (3) 生徒の活動の詳細と分析

第1時および第2時の授業における生徒の活動についてさらに詳しくみていくことにする。以下、括弧内の数字は「学習活動の流れ」の注番号である。

(1)



(2)



(3) この表現は数学的には厳密ではない。また、「最短距離とは何か」についてはこの段階ではまだ明確には意識していないようである。

(4) (7) は比較的簡単に描けるが、(1) の地球儀の緯線のような同心円を描くには特別な道具が必要であろう。また、この生徒は次のような図で(7) の線の方が短いことのイメージを表現しようとした。

(5) 実際には、任意の2点をフリーハンドで結んだにも拘らず、ハットのエッジをあてて別の色のマーカーで2点を結んでみると、殆ど一致するのである。この事実を知って、生徒たちは感動した。その結果、球面上の2点間の最短距離について理解を深めることができたのである。

(6) 「どの2点を結んでも大円になる」ことに気づくのに、ハットは有効な教具であることが生徒の反応から確認できた。

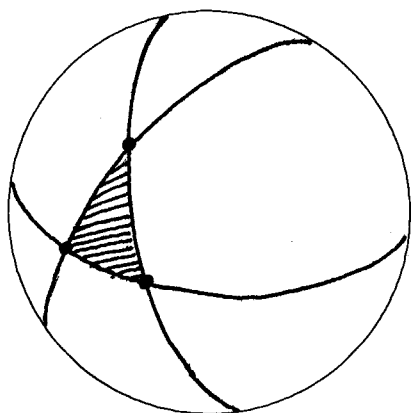
さらに、2点間の距離は円周の一部(弧)の長さを求めることと同じであるということに気づいたこの2名の発言をきっかけに、他の生徒たちもこのことに気づき始めることにつながった。

(7) 本来ならば「2点間の距離を求める式」を生徒自らの手で導かせることになるのであろう。実際、中学までの既習の知識でもって可能であろう。しかし、筆者の勤務校の生徒の場合にはそれ程容易なことではない。そのためにこのようにやや紋切り型の授業のまとめとなった。

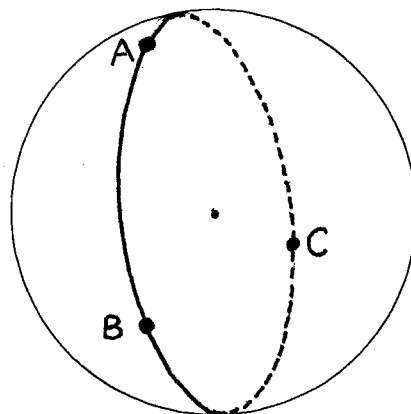
ここの部分については、さらに発展的に扱う方が良いと思われる。

(8) ここでの生徒の反応は、きわめて素朴な答えに終始した。「一直線上にない3点」という条件は抜けている。実際の授業では「3点が一直線上にある場合はどうであるのか？」という発問をし、注意を喚起した。

(9)

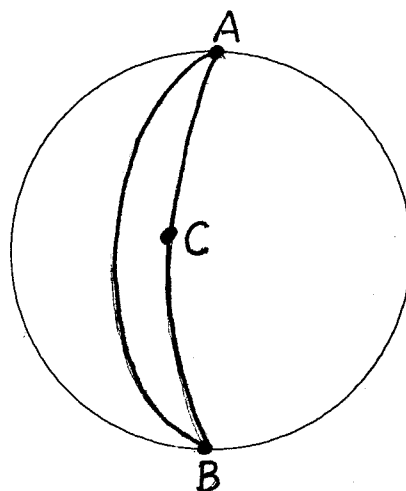


(10) これは「退化した三角形」と呼ばれるものである。しかし、これを三角形と認識するのが生徒にとっては困難なので、ここでは除外した。



(11) このことに気づいた生徒はいなかった。

実際に、この状態はかなり特殊な場合である。しかしながら、模型を用いた説明と、さらに生徒自らの手で球面にマーカーでいろいろ線をかき入れる活動を通して、「2点が極点」の場合にも三角形ができないことがよく理解できたようである。生徒たちはこの場合にでき図形を「舟の形」と呼んでいた。(右図)

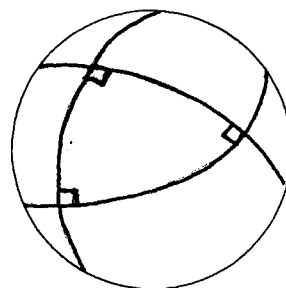


(12) 空間図形に関する授業なので、本来ならば、「球面上の退化していない三角形の内角の和は  $180^\circ$  より大きく  $540^\circ$  より小さい」ことを証明するなどに発展させるべきであろう。しかし、本校の生徒にとっては困難である。したがって、今回の授業では平面上の三角形において成り立つことが、球面上の三角形では成り立たないことに気づかせるという扱いにした。

(13) 球面模型にマーカーで三角形を描き、それらの内角を「球面分度器」で測定してみれば、すぐに予想は可能である。

しかし、もっと一目瞭然な反例を見つけ出す経験をすることにより、論証が苦手(というより殆どできない)生徒にも少しでも論理的思考の有効性(よさ)の一端に触れさせようと考えた。

したがって、別の展開も充分考えられる。





## 5. この授業を発展させれば

空間思考育成という点から考えれば、上記の本校での授業展開に加えて、さらに発展的内容を扱う必要があると思われる。特に、「平面上の図形」と「球面上の図形」とを比較しながら探究するような活動を追加する必要があると思われるのである。

追加する内容の例としては次のようなものが考えられる。

### (1) 球面上の直線について

- ・任意の2点を通る直線（大円）の個数 → 2点の位置による場合分け
- ・異なる2つの直線（大円）の交点の個数
- ・異なる2つの直線（大円）は平行になることはないという性質
- ・異なる2つの直線（大円）の垂直 → 垂線による球面の分割、共通垂線の存在
- ・3直線（大円）による球面の分割 → 場合分けの練習
- ・直線（大円）の数と分割される領域の個数 → 数学的実験、場合分け、漸化式の利用

### (2) 球面上の三角形について

- ・二角形の存在
- ・球面三角形の個数 → 数学的実験、場合分け
- ・球面三角形の内角の和 → 既知の数学的知識を用いて内角の和が  $180^\circ$  より大きく  $540^\circ$  より小さいことを証明する。  
特別な場合（退化した三角形）も扱うかどうかは、生徒の実態により判断する。
- ・直角三角形の性質
- ・三角形の合同条件 → 平面の場合との違いについてまとめる活動
- ・三角形の相似条件 → 平面の場合との違いについてまとめる活動
- ・三角形の面積 → 公式をつくる、式表現の活用
- ・球面三角形の正弦定理 → 三角比を応用した証明（エンリッチメント）
- ・球面三角形の余弦定理 → 三角比の応用した証明（エンリッチメント）

### (3) その他

- ・球の方程式 → 現行（平成15年度より実施）よりも詳しく扱う。
- ・球と平面との関係 → 交線、接平面の方程式など、数学的表現を中心に扱う。
- ・地図についての考察（図法）
- ・影絵についての考察（射影、変換）
- ・鳥瞰図・イラストマップの製作
- ・パースペクティブ（遠近法） → 数学を用いて分析
- ・造形作品としての球 → 薄いベニヤのチップを重ねて球を作る活動
- ・リーマン幾何について → 非ユークリッド幾何についての学習、トピックとして扱い。数学史の学習（エンリッチメント）

これらのいずれの内容を扱うにしても、本稿の授業で行ったように空間学習は、模型を使用し、得られる情報を論理的推論により正しく判断して関連づけるという具体的な経験を生徒ができるように学習場面を設定することが重要である。さらに、学習により得られた知識・技能・表現力を活用する場面をも準備したいものである。

## 6. 授業後の考察 —— 空間思考育成の視座からの成果と課題

### (1) 指導者の視点から

#### ① 授業の成果

- ・既習の知識、論理的思考力、空間把握に多くの問題を抱えながらも、球面模型を操作することで、生徒自らの手により「大円の性質」「球面上の三角形の性質」のいくつかを発見するという、生徒の気づきから出発して思考が進む体験をさせることができた。
- ・平面上の三角形と球面上の三角形では共通な性質と異なる性質があることに気づかせ、比較しながら考えることが有効であることを経験させることができた。
- ・反例と命題との関係を具体例で示すことができ、生徒の興味を引き出すことができた。結果として論証が苦手というより殆どできない) 生徒に数学的な考え方のよさの一端に触れさせることができた。
- ・「図形・空間の学習における生徒の活動目標」の点では、「図などを用いて適切に表現し、説明や伝達をすることができる」ことがすべての生徒において、ほぼ達成できた。
- ・「球面上の図形」は指導内容(生徒にとっては学習内容)として妥当であることが確認できた。

#### ②

- ・生徒の実態と配当時間数の関係から、2点間の最短距離や球面三角形の面積の求め方を生徒たちに考えさせるような、発見、気づきを重視した展開ができなかった。
- ・平面上の図形の性質と球面上の図形の性質を対比させて整理する「まとめ」を時間をかけてきっちりと行えなかった。
- ・問題場面を表すのに相応しい表現法を選択できるように、多様な表現法に習熟するという目標は達成できなかった。
- ・扱う課題(テーマ)を限定したこと(これは、この授業の長所でもあるのだが)により、多くの興味深い内容を扱えなかった。

### (2) 生徒の視点(感想)から

#### ① 授業の成果

- ・球面模型に線をかくことによって、紙に書いただけではわかりにくいことがよくわかるようになった。
- ・最初は意味不明だったが、グループで教えてもらいながらすればよくわかった。
- ・球面三角形はいろいろ不思議なことが成り立ち面白かった。
- ・内角が3つとも $90^\circ$ の三角形があることに驚いた。
- ・やりかたがわかれば、どれも簡単に描けるようになって嬉しかった。

#### ② 授業の問題点と課題

- ・直線でないものを直線のように考えたり、三角形でないものを三角形と思わないといけないので混乱した。
- ・3時間目の授業はわけがわからなかった。
- ・どうしてわざわざややこしいことしなければいけないのか?

・球面模型でするのは楽しかったが、後の計算やまとめは少し退屈だった。

生徒の感想から伺えることは、今までに学習したのと違う新しい世界での性質に大変興味を持つ生徒は授業を好感的に捉えているのに対し、興味を持たない生徒は当然のことながら、混乱したなど否定的に捉えている。新しい学習内容を扱うに際しては、この点に十分に注意を払う必要がある。

## 8. おわりに

今回の授業においては、球面上の図形の性質について探究するにあたり、たえずプラスチック製の透明半球を2個組み合わせることができる球体模型に線を描いたり、そのなす角の大きさを測定するなど、具体物の助けを借りることができるようにした。

それは、3次元空間図形、立体をイメージし、それを問題解決の助けとなるような自分なりの絵、図、言葉による表現にできない生徒が多いという問題点の克服のためには、生徒による数学概念の把握、関係の理解、問題解決法の発見や、その後にそれらの論理的で数学の形に整った記述、表現を生徒がするように、あるいはできるようになるまでに、未完成で、私的な表現をする活動を充実させようと考えたからである。

このように考えると空間学習が、国語教育、外国語教育、音楽、美術、演劇、体育などととも「表現教育」の一翼を担うものであるという観点で数学の授業をとらえ直すことが必要であるともいえる。それにより、高校でも、さまざまな表現活動——それには、数式による表現も含め、図、表、絵、body language、言葉による説明、コンピュータによるデモンストレーション、模型作り、などを含めたい——をする数学の授業の新しい方向が見いだせるであろう。

他方で、球面上の図形に関する探究から出発して、地球上の2地点間の最短距離を求める、地球儀を用いた地理や理科(天文)など他教科の学習につなげることも考えられる。その他として、

- ① 地図について考察する(図法を学ぶ)
- ② 影絵を科学する(変換について学ぶ)
- ③ パースペクティブ(遠近法)を数学的に分析する

などの活動を空間学習に取り入れることも考えられるであろう。

空間学習はこの意味で、多分に教科の枠を超えた総合的、学際的学習であるといえるであろう。このことをしっかり意識することが、小・中・高校一貫した空間思考育成のためのカリキュラムを構想する際に重要である。

すなわち、現在の我が国の数学のカリキュラムでは扱われていないが、他の教科や、芸術作品の製作に数学的アイデアを用いることのよさが理解できるような授業場面を設定することが、空間学習においては、とりわけて重要なポイントなのである。

このように考えると、空間思考を育成する活動がいわゆる「総合的な学習の時間」の重要な活動の一つにもなり得るであろう。すなわち、「数学教育における空間思考の育成の視座からの図形・空間カリキュラムの開発・研究」にあたっては、数学教育の枠内にとどまらない広い視点からの研究が必要である。