

## 第3章

### 空間思考の視座からの 図形・空間カリキュラム開発研究

1. 空間思考の視座からの図形・空間カリキュラム開発研究  
(狭間節子)
  
2. 図形・空間のカリキュラム・学習指導の開発への提言
  - 小学校  
図形・空間カリキュラム研究—小学校低学年— (赤井利行)
  - 中学校  
中学生の実態から見た問題点 (荊木 聡)
  - 高等学校  
図形・空間の学習における生徒の活動目標の設定 (田中正男)

# 1. 空間思考の育成の視座からの図形・空間カリキュラム開発研究

狭間節子  
大阪教育大学

## 1. 研究の目的

本研究の目的は、前章までの研究成果をふまえて、その延長として、「数学教育における空間思考の育成の視座から図形・空間カリキュラム開発研究」にある。そのために次の課題をおく。

- (1) 先行研究からカリキュラム開発研究への示唆を得ること
- (2) 「空間思考の育成の視座」を明確にし、カリキュラム構想に位置づけること
- (3) 空間思考の育成の視座から図形・空間カリキュラム骨子を構想すること

## 2. 先行研究からの示唆

### (1) 身の周りの空間事象からの数学化

オランダのフロイデンタール研究所を中心とする *Realistic mathematics education* (以下、RME と略記する) はわが国でも紹介されている。第2章で、橋本氏による「オランダ実験教科書を見る」においては、詳細に考察されている。以下では、RME を大局的な観点から捉える。

筆者は、オランダの RME について考察したなかで、RME の底流にある教育観に関して、大きくつぎの2点を指摘した[1]。第一はフロイデンタールの「数学化すること」である。フロイデンタールは、数学は、現実に関わりつづいた人間の活動として理解されるべきであると主張した。したがって、「生徒が学ぶべきことは、すでにでき上がった閉じた体系としての数学ではなく、まだ数学でない事象を数学化すること、つまり、それらを数学的に受け入れられるある構造に組織化する(関係づける)ことである。」[2] この意味を彼の主張からたどると次のように説明できる。組織化をせまられる諸現象から出発し、生徒に関係づけの手段を扱うことを教える。関係づける過程で、関係づける道具として数学的構造を生徒自身が創り、概念達成においてそれらの道具を処理し、用いることを学ばせる。諸現象から出発することによって、その過程で心的対象または直観的概念がつくられ、概念達成の基礎としてもまた応用としても助けになる。

第二はトレファース貢献[3]によるもので、フロイデンタールの数学化の活動をつぎの2つの側面に区別し、

水平的数学化 (*horizontal mathematization* : 非-数学的場面と数学的観念との間に関係を築く活動)

鉛直的数学化 (*vertical mathematization* : 数学的要素を、一般的にはより抽象的にまたは形式的に組み合わせ、構造化し、組織立て、発展させる活動)

両者をあわせて、漸進的数学化 (*Progressive mathematization*) とし、この考えに基づいて、小学校数学のいくつかの領域を局所的に構築した。

漸進的な数学化はつぎの原則として、RME に生かされている :

- ① 具体的な文脈をもつ問題の探究
- ② 鉛直的な道具（モデル、図・表、記号など）を用いたより高いレベルへの橋かけ
- ③ 学習過程における生徒自身による構成と所産
- ④ 相互作用
- ⑤ いろいろな領域の関連づけ

漸進的な数学化は、水平的数学化の後に鉛直的数学化をするというものではなく、両者が絡み合いながら、少しずつ水平的にも鉛直的にも進んでいくというものである。進み方は、生徒が問題状況をどう捉えるか、彼らの知識・技能、使える道具の持ち合わせ、相互作用等に関わって異なる。より高いレベルに進むにつれて、一人ひとり違った漸進の度合いや到達がある。

小学校（4～14歳）の「幾何」[4]では、第一に、身の周りの空間事象から出発し、徐々に平面図形や立体図形と関連づけていくという点で、独自の幾何展開をなす。水平的数学化にあたる活動では、「空間を経験する活動」に重要な位置を与えている。第二に、3次元の事象と2次元図をつなぐ「視覚化」に関わる活動を重視している。空間から入る学習では当然との見方もできるが、後の概念達成や推論において不可欠の心的支えとなることを重視している。「幾何」では次のような多様な側面で活動が展開されている。

① 見ることと投影すること

視線と視角、視点の変更などが中心的な役割を果たすような、立体物や現象を見る、知覚する、表現する、説明する活動である。これらの活動は、平面や空間における直線、点、方向、距離、平行、交わる直線と交わらない直線などの概念及びそれらの概念の基礎的な関係につなげられる。

② 方向を定めることと位置を決めること

空間におけるものの位置、ある地点から他の地点への行き方など。言葉、図（ルート図、地図、グラフ）、空間的モデル、記号などを用いて説明する活動が対応する。

③ 空間的な推論

常識を用いて、筋道たてて説明する活動が対応する。たとえば、真上から見た図、正面から見た図、真横から見た図を基にして、立方体ブロックで組み立てるなど。

④ 変換すること

線対称、面对称に焦点が当てられた活動：鏡を使った活動など。

⑤ 構成することと描くこと

2次元、3次元図形の両方に関わる活動：具体物（ブロック、レゴ、タングラム、紙、鏡、模型など）を用いた構成、方眼紙上の表現、タイル張りデザイン、3次元図形の2次元表現（スケッチ、ダイヤグラム、図式、図など）、その逆の図や視覚化の解釈およびそれらをつかう活動。

⑥ 測定することと計算すること

鉛直的数学化に注目すると、「空間を経験する活動」で得られた諸道具を、数学的な道具に発展させ、形式化する活動が位置づけられている。いろいろなリアルな問題場面を、透視図、平行投影図、直角投影図、切断図などに表す活動と、逆に、図から場面についての情報を得る活動が位置づけられ、問題解決の数学的道具として用いられる。[5]

RMEの例から次の示唆が得られる。

- (1) 「空間を経験する活動」の素材の豊かさと活動の例を見ると、わたしたちの周囲や日常活動のなかに、空間・図形に結びつく素材がいかに多く存在しているかに気づかれ、と同時に、わたしたちはそのことに無関心なっていると反省させられる。
- (2) 立体物や現象を見る、知覚する、表現する、説明する活動を通して得た道具を、後の数学的道具につなげるという明確なねらいをもった「空間を経験する活動」をわが国の図形・空間教育においても参考にしたいものである。

## (2) 「視覚化のルネッサンス」

上記 RME にも見るように、近年、「視覚化」の活動が注目され、プロジェクトやカリキュラム研究においても一定の位置を占めている[6][7]。

Hershkowitz, R.らは、現代化以後の図形・幾何教育の国際的動向を踏まえ、「空間と形」の可能な役割について、次の3つの展望を議論している[8]。

- 1) 空間内の実在の形と相互作用すること
- 2) ある理論を構成するための基礎的な構成要素としての形と空間
- 3) 数学や科学の諸領域の概念、過程および現象をよりよく理解するための手段としての形、または視覚的表現。

1) の展望は、ほとんどの国のカリキュラムで、空間図形や空間に関する学習が欠如していることに基づいている。2) の展望は、幾何や数学の諸理論で、最も抽象化された場合でも、わたしたちはある種の形や空間を、目にみえる・みえないに関わらず、(心的メージの理論的表現を) 処理していることに関連している。3) の展望は、とくに、1) と関わって、「視覚化」に関する活動の重要性を指摘する。ここで、視覚化とは、「対象、概念、現象、過程およびそれらの表現を、ある種の表現へ、およびその逆へ、変換することであり、また、あるタイプの視覚化から、他のタイプのそれへの変換することをも含んである。」

さらに、「生徒が、実在の対象、数学的概念、過程および現象を視覚化できることは、今日では、計算し、記号化することと同様に、数学的活動である」および「視覚的教育は、往々にして、カリキュラムでは、とくに第一の展望と関連して、無視されている領域である」と指摘している。

幾何の領域は多様な側面をもち、各国において、幾何教育は多様であり、幾何教育の目的、内容、学習指導の方法においてさまざまである。それらをふまえながらも、これらの展望が、数学教育において「空間と形」が果たす可能な役割について明確にしていることに注目すべきである。

## (3) 幾何の多様な側面をカリキュラムにどう取り込むか

幾何は多くの側面をもつ。学校幾何のカリキュラム構成は、幾何の多様な側面をどのように取り込むかの課題でもある。

数学教育の現代化の時期に、わが国を含む多くの国で、学校幾何として、どのような内容をどのように構成すべきかについて議論された。その結果、わが国でも、従来のユークリッド幾何からの内容に加えて、中学校には変換の考え、位相的な見方などが入り、高校には、いろいろな幾何が勢ぞろいした：ベクトル、平面図形と式(数学Ⅰ)、平面幾何の公理的構成、空間における座標とベクトル、行列(一次変換)(数学ⅡB)。[9]

この期の幾何の多様性の取り入れは、それぞれが独歩し、(位相的な見方を除いて)理論的構成の意味合いが色濃く出ていた。

40年を経過した今日では、多様な側面の内容においても、その取り入れ方においても異なってきた。Hershkowitz, R.らの展望2)とも関連するが、将来いろいろな側面に発展する基礎となる内容や考え方を相互に結びつけるような数学的活動を通して、経験し、獲得していくという取り入れ方が考えられる。

NCTMのスタンダード2000[10]においては、Pre-K-12学年を通して、共通した内容スタンダードとプロセススタンダードからなる(内容のよこ軸と過程のたて軸からなる枠組みで)カリキュラム構成している:

「幾何」の内容スタンダード:

- ・ 2次元と3次元の図形の特徴と性質を分析し、図形の関係についての数学的議論を発展させる
- ・ 座標幾何や他の表現体系を用いて空間的位置を特定し、空間関係を記述する
- ・ 数学的場面を分析するために、変換を適用し、対称性を用いる
- ・ 問題解決に、視覚化、空間的推論及び幾何的モデル化を用いる

「数学」全体のプロセススタンダード:

- ・ 問題解決
- ・ 推論と証明
- ・ コミュニケーション
- ・ つながり
- ・ 表現

カリキュラムに幾何の多様性を取り込む一つの構成の方法であるといえよう。

小高による「図形・空間のカリキュラム改革」[11]においては、スキーマ形成を軸にした統合幾何が提唱されている。図形・空間のスキーマ系(認知構造の階層性)が示され、統合幾何のカリキュラムが構想され、その仕組みによって範例的授業が構成される。

「幾何」のスキーマ系では、11の区分の各スキーマ項目と各学習レベルとの関連が示されている。それらのスキーマ系に、幾何の多様性が取り込まれ、統合されている。

図形・空間カリキュラムの構想には、ア. 学習内容面の系統性(軸) イ. 学習活動を貫いて目指す軸(子どもの認知・認識・思考等の発達に関する面) ウ. 両者の関連づけを可能にする指導実践の軸、および、エ. これらの軸の相互関連が反映されることが必要である。そのもとに、「基礎・基本」に、多様性を取り込み、統合させていくことが期待できる。

### 3. 空間思考の育成の視座からの図形・空間カリキュラムの構想

#### (1) 「空間思考の育成の視座」について

第1章の1において「児童・生徒の空間思考の発達の指標」を抽出し、2においてその指標を基に、空間思考を育成する活動を次ぎの4つの柱:

「空間的イメージ」; 「操作」; 「表現とその間の変換」; 「判断と推論のよりどころ」で構成し、指導実践の一覧表(第1章2の[資料]参照)を提示した。

次頁の表1に示す「空間思考の発達の指標の概要-空間的イメージ・操作・表現とその間の変換・推論のよりどころの関連」は、空間思考の発達の指標を、空間的イメージ、操作、表現とその間の変換、判断と推論のよりどころおよびそれらの関連性について、上記実践の裏づけをもって再検討し、整理したものである[12]。

表 1. 空間思考の発達の指標の概要 — 空間的イメージ - 操作 - 表現 - 推論の関連 —

空間的イメージ	操作の特徴	表現と表現間の変換	判断・推論のよりどころ
A 図の意味する対象を、図の外形や見え、部分の特徴によって捉える	図の視覚的、静止的、平面図的印象	「〜の形に見える」	
B 図の意味する対象を経験と結びつく具体物と捉える。具体物のイメージをもつ	手ぶり身ぶりの表現 具体的操作の特徴の視覚化、日常の言葉。	手ぶり身ぶりの表現 具体的操作の特徴の視覚化、日常の言葉。	具体物をイメージした手・身体的操作の特徴。具体物の特徴的な機能。身体軸による具体物の捉えや見え。
C 操作に必要な、構成要素で把握される対象のイメージをもつ	部分的に心的操作を行うが、操作と対象の構成要素の関係を結びつける分析が主となる。操作の区間が短い。視点の変更や操作に必要な対象の部分への焦点化が現れる。	心的操作の結果を表す 自分流の図表現（視覚化）や言葉分析に用いる。 見取図などの面、辺、頂点に注目し、構成要素の関係を捉える。	図の三次元対象の構成要素等の読み取りと自分流の操作結果。 操作の図形的、空間的意味。 分析で得られた対象の性質。
D 対象の構造や空間関係を保った操作をともなう動的イメージをもつ	対象の部分への焦点化、次元の変化、視点の変更と統合。操作の区間が長い。異なる図表現間のイメージの切り替え。	規範的な図（見取図、展開図、投影図など）、簡略図、操作を表す図などの表現、図表現間の変換、言語・記号表現。	操作にかなった図表現と空間関係の説明。空間関係を保った図表現間の変換の柔軟性。図表現—言語表現—記号表現間の変換。
E 操作そのものへの焦点化と結果のイメージをもつ	操作のアルゴリズム化、自由な自由な視点からの投影的見方、空間における変換など。論理的操作。操作が素早く、ほぼ正確。	図表現を基に、目印・矢線、関係記号や言葉を用いた説明。一般に、与えられた図以外の図表現を必要としない。	空間図形の性質(含む立体の対称性)や幾何学的変換の性質、論理的根拠。

本研究では、表1に示した「空間思考の発達の指標の概要」をカリキュラム開発の基礎的枠組みとし、この枠組みを基礎とする図形・空間のカリキュラムおよび学習・指導へのアプローチを「空間思考の育成の視座」とする。

## (2) 空間思考の育成の視座からの図形・空間カリキュラム構想

空間思考の育成の視座からの図形・空間カリキュラムを構想するにあたり次の諸点を基礎においている。

- I. 空間思考の育成の目的は、2,3次元空間を認識し、図形、空間図形、及び空間関係を、2次元図に表現し、図を基にイメージをつくり、操作し、分析し、構成し、創造する力を育成することにある。
  - II. 「空間思考の発達の指標の概要」(表1)を基に、空間的イメージ—操作—表現とその間の変換—判断と推論のよりどころの4つの側面を重視した学習活動と学習内容の関連を密にする。
  - III. そのために、次の活動が基礎となる：
    - (i) 具体物、模型、空間的事象を対象にした経験と具体的活動
      - ・観察、実験・実測、および分解・合成、展開・構成、投影、切断など具体的操作を通して、立体の基本的な性質や空間関係を捉えること
      - ・身体表現、日常語などを用いて自由に表現すること
      - ・具体的操作の要に着目した動的イメージをつくること。
    - (ii) 構成することと表現すること
      - ・立体や空間関係を具体的に構成し、いろいろな表現方法によって、2次元図に表現すること(初期の段階では、自分なりの表現、フリーハンドの図などを用いる)
      - ・平面や空間における位置を2次元に表したり、読み取ったりすること
      - ・図から必要な図形・空間関係を読み取り、イメージし、操作し、新たな図形や関係を構成・創造すること
      - ・いろいろな図表現の間の変換をすること
    - (iii) 分析することと説明すること
      - ・立体・空間図形などの分析方法として、展開、投影、切断などの幾何的操作の手法を用いること
      - ・2次元図を基に、上記の心的操作をおこない、平面図形の性質と関連して、分析・考察すること
      - ・心的操作では、操作に応じた対象の部分への焦点化(次元の変化)に着目すること
      - ・操作や分析の結果や過程を、模型、図、用語・記号を用いて、論理的に裏づけし、説明すること
      - ・分析・考察に当たっては、帰納的、対比的、類比的な方法を有効に用いること
    - (iv) つかうこと(1)
      - ・基本的な知識・技能、表現、心的操作を相補的につかうこと
    - (v) つかうこと(2) エンリッチメント
      - ・拡張し、探究すること
- これらの構想で、図形・空間カリキュラム骨子を構成する。

【引用・参考文献】

- [1] 日野・狭間 (2001) 「実際の数学教育とジェンダーの問題—オランダの算数・数学教育の動向—」 日本数学教育学会誌、83-8、pp.29-39
- [2] Freudenthal, H.(1973) *Mathematics as an Educational Task*, D. Reidel Publishing Company, p.133
- [3] Treffers, A. (1987) *Three Dimensions*, D. Reidel Publishing Company, pp.247-250
- [4] Moore, E. de. (1991) *Geometry – Instruction (aged 4-14) in the Netherlands –the Realistic Approach – in Streefland, L. (ed.), Realistic Mathematics Education in Primary School. pp.119-138*
- [5] Hershkowitz, R. & Parzysz, B. & Joop van Dormoren(1996) *Space and Shape*, Bishop, A.J. et al. (eds.), *International Handbook of Mathematics Education*, pp.182-191
- [6] NCTM (2000) *Principles and Standards for School Mathematics*
- [7] Claudi Alsina (2000) *Gaudi's Ideas for Your Classroom — Geometry for Three-Dimensional Citizens —*, ICME 9, Regular lecture
- [8] Hershkowitz, R. Parzysz, B. & Joop van Dormoren (1996) *Space and Shape*, Bishop, A. J. et al.(eds.), *International Handbook of Mathematics Education*, pp.161-204
- [9] 文部省 (1970) 中学校指導書 数学編, 大阪書籍  
文部省 (1970) 高等学校学習指導要領 数学
- [10] NCTM (2000) *Principles and Standards for School Mathematics*
- [11] 小高俊夫編著 (2002) [改稿版] 図形・空間カリキュラム改革, 東洋館
- [12] 狭間節子(2004) 空間思考の育成の視座からの図形・空間カリキュラム開発研究構想,大阪教育大学教科教育研究会 教科教育学論集、第3号,pp.68
- [13] 文部省 (1999) 小学校学習指導要領解説 算数編, 東洋館  
文部省 (1999) 中学校学習指導要領解説 数学編, 大阪書籍



## 3-2 図形・空間のカリキュラム・学習指導への開発への提言

### 1. 図形カリキュラム研究 —小学校低学年—

赤井利行

広島大学附属小学校

#### 1. 研究のねらい

今回の学習指導要領の改訂に伴って、文部科学省から学習指導要領を最低基準とするという位置づけが示された。一方、発展的な学習の推進によって、学習指導要領を越える内容を指導することも各学校独自の判断で認められた。これは、今まで学習指導要領のみに準拠し、その学習指導要領に沿っていかにもうまく指導するかを考えて進めてきた授業研究が、この最低基準と発展的な学習によって、学習内容も指導方法も学校独自のカリキュラムを作成する授業研究へと変化させることができるのである。

本研究は、授業実践をもとに、図形の見方・考え方を高めると同時に、図形指導の内容を豊かにすることを試みる独自の図形カリキュラムを作成することを目的としている。

したがって、学習指導要領に示された内容を含み、子どもが理解できる学習指導要領の枠を越えた指導内容と、図形の見方・考え方を高める新しいカリキュラムにあった指導法を具体的に示していく。このことは、真に、学校現場で活用できる図形カリキュラムの作成につながっていくものである。

学習指導要領において、小学校図形教育で取り扱う図形は次のように指定されている。

第1学年	記述なし
第2学年	三角形、四角形
第3学年	箱の形、正方形、長方形、直角三角形
第4学年	二等辺三角形、正三角形、円、球
第5学年	台形、平行四辺形、ひし形、多角形
第6学年	立方体、直方体、角柱、円柱

本研究では、学習指導要領に示されている第2学年の「三角形、四角形などについて知り、それらをかいたり作ったりすること。」を取り上げる。そして、この内容を子どもの活動と理解にそってどのような指導内容に改訂するか、授業実践に基づいてその指導方法はどこにあるべきか指導内容と指導方法を一体化して、図形カリキュラムを提案するものである。

小学校低学年の子どもにとって、図形概念を理解することは、言語としての知識を理解することではなく、活動としての理解である。したがって、三角形・四角形を理解するた

めには、それに見合う活動が重要である。言葉だけの定義や観察だけの学習は、子どもにとって知識の暗記に陥り、図形を理解し活用できる知識とはならないのである。したがって、それらの図形を作ったり、切ったり、重ねたりする様々な算数的活動を取り入れる必要がある。もし、そのような活動ができなければ、指導する時期を遅らすべきである。一方、三角形・四角形以外の図形にまで、その活動を通じた理解が広がるならば、当然指導内容も広げるべきである。

## 2. 教材研究

2年生の三角形・四角形の指導は、今日、動物囲みが一般的に用いられている。この算数的活動は、三角形・四角形を子ども自らが作り出す点で優れた活動である。しかし、作った三角形・四角形を使って考察していくという子どもの活動の連続性からジオボードによる導入が考えられる。

このジオボードは、次の5つの特徴がある。

- ① 自由性
- ② 手・目・頭・口の総合的活動
- ③ 分析・分類と総合・統合が相互に関連
- ④ 発見・創造
- ⑤ 具体的かつ有限

そして、筆者は低学年での図形指導の柱として、ジオボードによる活動を重視している。ジオボードにはいろいろな種類があるが、低学年の子どもにとって扱いやすさから、3×3のジオボードが有効に使用することができる。

また、子どもたちは生活経験の中から、「さんかく」や「しかく」という用語を用いている。この子どもたちの生活経験をもとに、ジオボードにいろいろな三角形・四角形を構成することは可能である。また、この算数的活動は子どもたちに興味をもって迎えられ、積極的な活動を生み出すことができる。

### 第2学年 算数科学習指導案

#### 1 単元

三角形・四角形

#### 2 指導計画 (全6時間)

第1次 直線

第2次 三角形・四角形

第1時 直線でかこまれた形

第2時 三角形・四角形の分類・定義

第3時 三角形・四角形の作図

第4時 三角形の分割

第5時 四角形の分割 . . . . . 本時

#### 3 単元について

本単元は、構成要素に着目した図形の見方・考え方を豊かにし、三角形・四角形の定義を理解することが主なねらいである。子どもたちは、日常生活で「さんかく」や「しかく」などの用語を用いている。しかし、本単元では、3本の直線でかこまれた形を「三角形」

といい、4本の直線でかこまれた形を「四角形」というように定義する。

子どもたちは、第1学年で、箱など身近にある立体の観察や構成などの算数的活動を行ってきている。また、ジオボードなどを用いて、さんかくやしかくの形を作る算数的活動を楽しんできた。しかし、子どもたちは、自分の考えを積極的に発表することはできるが、友だちの考え方を十分に受け入れ、自らの考えを修正できる点にはまだ不十分さが残っている。

本単元では「三角形」や「四角形」などの用語を形式的に指導するのではなく、身の回りの形を観察したり、ジオボードを用いて構成・分類するなどの算数的活動を通して、子ども自らが理解できるように配慮する。さらに、紙を切ったり折ったりするなどの算数的活動を通して、三角形・四角形の理解を深めていく。また、本授業では、四角形を1本の直線で分割する活動から、新たな図形を構成する。そして、この算数的活動の中から五角形を構成させる。この五角形を既習の三角形・四角形の定義から新たに定義する発展的な学習を取り入れる。次に、五角形を見つける活動としてサッカーボールを観察する。このサッカーボールの中には六角形を見つけ、四角形の分割から学習した五角形の定義をさらに発展的に考えさせ、六角形の定義を行う。

#### 4 提案問題

子どもたちは四角形を1本の直線で分割するという算数的活動を行う。このとき、子どもたちは、分割を通して、新たな図形をイメージし、どの部分に直線を引くか意図的な算数的活動が行えているか。また、子ども同士の数学的なコミュニケーションによる社会的相互作用によって、数学的な考え方に基づいて五角形・六角形の定義を発展的に考え出すことができたか。この発展的な学習が三角形・四角形の理解をさらに定着することができたか、明らかにしていきたい。

#### 5 本時の目標

- 四角形の紙を切る算数的活動を通して、三角形・四角形の理解を深める。
- 三角形・四角形の定義を基に、五角形・六角形の定義を発展的に考えることができる。

#### 6 学習過程

学 習 活 動	指 導 の 意 図 と 手 だ て	評 価 の 観 点
1 課題の設定 (1) 四角形を1本の直線で分割する。 ・ジオボードに作った四角形で分割する。	○2つに分割したときにできる形をイメージさせる。 ○切断する位置によって、できる形が変化することに気づかせる。 ○直線の位置とできる図形の関係を調べさせる。	○分割した図形をイメージできたか。 ○本時の課題がつかめたか。
2 課題の追究 (1) 直線の位置を変えて、いろいろな図形を作る。	○直線の位置を自由に決めさせ、できる図形を調べさせる。 ○できた図形を確認する。 ○三角形・四角形の定義を基に五角形の定	○いろいろな位置で分割できたか。 ○五角形の定義について、既習の学習

<p>(2)五角形を定義する。</p> <p>(3)直線の位置とできる図形 の関係を考える。</p>	<p>義を考えさせる。</p> <p>○直線の位置とできた図形の関係を表に表 させる。</p> <p>○直線の位置とできた図形の関係を考察さ せる。</p> <p>○頂点と直線の位置に着目させる。</p> <p>○ジオボード上に四角形を作り、直線で分 割させる。</p>	<p>を生かし、発展的 に考えられたか。</p> <p>○関係について、考 えられたか。</p> <p>○自分の考え方と友 だちの考え方を比 較検討し、よりよ い考え方に結びつ いたか。</p>
<p>3 課題の発展</p> <p>(1)身の回りにある五角形を 探す。</p> <p>(2)六角形を定義する。</p>	<p>○身の回りにある形に着目させる。</p> <p>○サッカーボールを取り上げ、五角形を見 つけさせ、六角形に気づかせる。</p> <p>○六角形の定義を既習の学習を生かして発 展的に考えさせる。</p>	<p>○六角形の定義を発 展的に考えられた か。</p> <p>○身の回りの図形に 着目できたか。</p>

#### 4. 提言

ジオボードを用いて、三角形・四角形を構成する活動は、子どもたちにとって積極的に取り組めるものであった。ジオボード上にできる全ての三角形・四角形を構成することもできた。この点から、現行学習指導要領の三角形・四角形を指導するという内容は、当然の指導内容と考えられる。

また、三角形・四角形以上の多角形については、三角形・四角形の切断から、五角形が作り出すことができた。また、この五角形の定義を子どもたちが既習の経験を生かして考えることから、五角形の学習は指導内容として取り入れることは可能である。

しかし、五角形を日常生活の場面で見える機会は少ない。ただ、子どもたちが遊ぶサッカーボールの表面に五角形がある。このサッカーボールを子どもたちに見せた折り、その表面にある六角形も定義することができた。したがって、五角形・六角形を作ったり、かいたりする活動を取り入れるのは、第2学年では少し無理がある。

つまり、第2学年の主たる指導内容は三角形・四角形である。五角形・六角形は、三角形・四角形の指導を定着させるための発展的内容として知ることを中心に、学習する素材として位置付けたい。

#### 指導内容

三角形・四角形について、知り、それらを作ったり、かいたりする。  
五角形・六角形について、知り、三角形・四角形の理解を促す。

#### 指導方法

ジオボードを用いた三角形・四角形の切断

## 2. 中学生からの実態から見た問題点

荊木 聡

貝塚市立第三中学校

空間・立体図形に関する幾つかの課題について、中学三年生 72 名を対象に 1 月末ごろに実施した。ここでは、その結果を概観しながら、空間の幾何教育における問題点と指針について論述したい。

### 1. 基礎・基本の定着を

#### (1) 正多面体の場合

右の表は、「正多面体の名称および面の形」についての通過率であり、正多面体 5 種類の名称を答えた結果は芳しくない。特に、5 種類すべての名称を答えた者は、わずか 3% に過ぎなかった。

一方、「正八面体、正十二面体、正二十面体」と答えられた者の内で、面の形を「五角形」までにしている者が 6% だったのに対し、「六角形」以上も答えた者は 21% もいた。さらには、名称のところに「正三面体」と書いた者も 3% あった。

	名 称	面の形
正四面体	81%	47%
正六面体	61%	50%
正八面体	72%	17%
正十二面体	50%	4%
正二十面体	33%	4%
その他	50%	

こうした実態は、主として「正多面体の定義」「1つの頂点に集まる角の和は  $360^\circ$  未満」という観点の欠如に拠るものであろう。事実、これらの生徒の中で正多面体の定義を正確に答えられた者は 2 割弱しかおらず、しかも面の形については 全員「暗記している」とのことであった。

#### (2) 2 直線の位置関係の場合

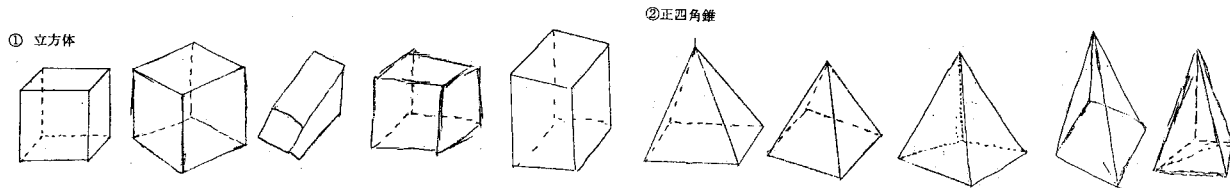
右の表は、「2 直線の位置関係」についての通過率であり、2 直線の位置関係にはどのようなものがあるかを問うた結果である。「ねじれの位置」という用語そのものは、ある程度定着しているが、ねじれの位置について説明させると、「2 直線が一つの平面上にない」という論理的かつ直接的な説明をした者は 5% に過ぎず、一方、「平行でもなく交わってもいない」という直観的・間接的な説明をした者は 77% であった。大半が感覚的な理解に止まっているのである。

交わる	65%
平行	81%
ねじれの位置	72%
垂直	47%
重なる	7%

#### (3) 見取図の場合

正八面体等のやや複雑な見取図になると、描いた図に歪みが生じてくる。また、立方体や正四角錐等の単純なものでも、15 秒以内で描ける者は 1 割程度である。これは、こうした技能に習熟する機会が少なく、どのような手順で進めると描きやすいかを知らないことが原因になっている。

実際、下の図は生徒に描かせた見取図であるが、一つの辺を描くのに何本もの線で少しずつ描いている図が幾つか見受けられる。また、立方体の見取図では、手前の面を正方形にしている図は 5 割に止まった。正四角錐の見取図でも、底面手前の辺を水平に描いた図は 5 割弱に止まっている。したがって、これらの見取図を自分で描き、それを利用して問題を考えていくような場合には、大きな困難を来す事が予想されるのである。



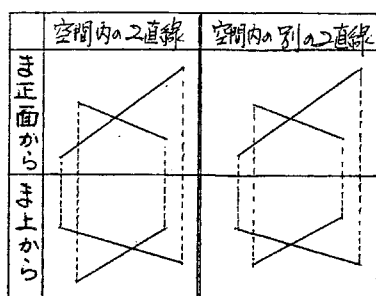
## 2. 実物を用いて、楽しさ・美しさ・驚き・感動を味わわせる

### (1) 投影図から立体をよみとる

投影図についての説明を一通り行った後で、立面図・平面図がともに合同な長方形になっている投影図を見せ、この立体がどのようなものかを考えさせた。右の表は、その通過率を示している。幾つかの2次元情報を統合して、一つの3次元情報を得るには、空間思考・イメージ力が重要であるが、この問いに3つ以上の正しい答えを記述できた者は2割弱であった。投影面に平行でない面や曲面を想像するのになれていない生徒が多いという結果である。

正四角柱・直方体	88%
円柱	53%
三角柱	24%
その他の正答	18%

### (2) 投影図から2直線の位置関係をよみとる



左の図は、空間内の2直線を立面図・平面図に投影したものであり、それぞれについて交わっているかを判断させた。それぞれの図を単独で与えたときの正答者は全くおらず、両方を並べて提示したときでも、正答者は12%しかなかった。

後の面接調査で明らかになったのは、交わっている2直線やねじれの位置にある2直線を模型で作り、実際に様々な方向から観察するという経験が全くないということであり、結局、教科書などの平面的な図を用いて、実体験に基づかない机上の知識として理解しているだけだったのである。

## 3. 直観と論理の統合

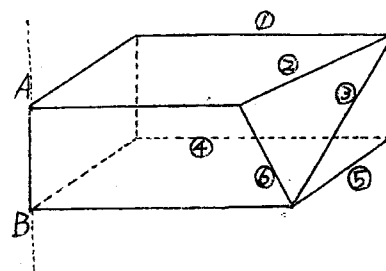
### (1) 2直線が「ねじれの位置」にあるかどうかの判断

右の図において、直線ABとねじれの位置にある辺（直線）に色を塗らせたところ、下の表の結果が得られた。

各辺ごとにみると、ある程度の通過率を示しているが、完全した生徒は5割弱であり、半数以上の者は部分的に漏れている

か、無答であったということである。漏れた箇所に関しては、ねじれの位置にある辺を4本挙げた者は、①②⑤のいずれかを挙げられずにいた。また、3本の辺を挙げた者は、①②または②③を挙げられていない。したがって、ねじれの位置について一応理解している者が見落としやすい辺として、②に注目しなければならないと言える。一方、

①や⑤の辺も、基本的な理解を促す上で注目しておかねばならないだろう。なぜなら、この2つの辺については、ねじれの位置にある辺を2本以下しか挙げられなかった生徒の多くも見過ごし



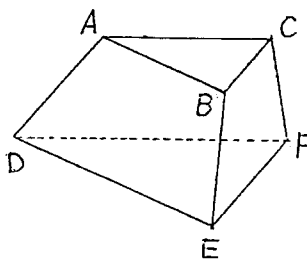
①	71%
②	86%
③	90%
④	81%
⑤	76%
⑥(誤)	19%

正答(5本)	48%
4本	19%
3本	10%
2本	15%
1本	5%

ていたからである。また、問題用紙を調べてみると、平行や交わっている辺をチェックし、それ以外のものを答えるという消去法による解答も見られ、興味深いところである。

(2) 2直線が「交わる」かどうかの判断

まず、右の図の問題を提示する前に、「ねじれの位置」にある2直線は「同一平面上にない」ことを確認した。その上で、右の三角錐台を示し、各辺を延長させてできる直線同士が交わるかどうかを判定させ、理由も尋ねた。その通過率を示したのが下の表であり、小問①～③全てに完答した者は29%であった。



小問①の通過率は67%であるが、論理的に正しい理由を答えた者は38%であった。そして、その内の6割が「延長すると三角錐の頂点で交わる」という回答であり、残りの4割（被験者全体の15%）が、「同一平面上」という意味の言葉が入った回答だった。

小問②の論理的な理由は「直線ADは、直線EFを含む平面と点Dで交わっており、したがって直線ADと直線EFが交わるには直線EFが点Dを通っている必要があるが、そうではない。」という形で正しく答えた者は、5%であった。また、小問③の理由については皆無である。以上のことから、ねじれの位置にあることを論理的に説明することが非常に困難であることが分かる。

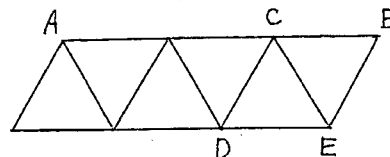
	①ADとBE	②ADとEF	③ADとCE
交わる	67%	0%	29%
平行	5%	19%	5%
ねじれ	29%	71%	38%
論理的な理由	38%	5%	0%

一つには「同一平面上」かどうかという視点そのものが身に付いていないことを挙げることができよう。もう一つは「同一平面上にない」ことを直観的・感覚的に捉える経験しかないという原因が考えられる。

4. イメージ力を育む

(1) デルタ六面体の展開図

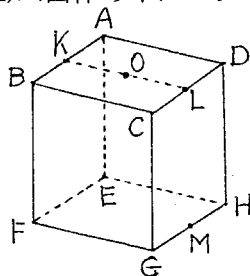
右の展開図を組み立てるとき、点Aと重なる点を答えさせた。その結果が下の表である。点B、C、Dの誤答がいずれも多く、また4か所以上の点に印を付けた者と無答の者を合わせて、38%にもものぼった。



右の表に示した正答者とは、点Eのみを回答した者のことで、1割を切っている。空間的なイメージ力の育成が、喫緊の課題であると言えよう。

点B	31%
点C	31%
点D	46%
正答者	8%

(2) 六面体のイメージ



左図は「 $\triangle KEF$ 、 $\triangle KEL$ 、 $\triangle KFL$ 、 $\triangle LEM$ 、 $\triangle LFM$ 、 $\triangle EFM$  で囲まれた六面体の体積を求めよ」という灘高の入試問題だが、この六面体をイメージすることさえできない者が68%もいた。

また、体積を求める方針が立てられた者は、全員が立体を分割する方法を採用しており、それは11%であった。そこで、他の方法も考えるように指示したところ、立方体から不必要な部分を削り取るという方針を考え出す者が現れた。それが被験者全体の3%というわけである。不必要な部分を削り取るという考え方には、立体を分割する時に用いるイメージ力以上に、高度な能力が必要であると言えよう。

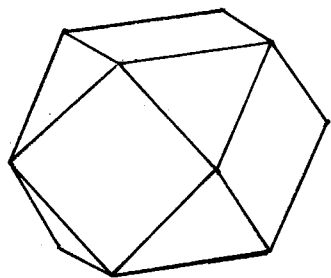
立体が分からない	68%
立体を分割する	11%
立方体から削り取る	3%

## 5. 新たな素材・方向を求めて

以上の調査結果を念頭に置いて、空間・立体図形指導の今後を展望してみたい。

### (1)空間思考・空間観念の育成

空間思考・空間観念の中核の一つにイメージを創生する力があるが、これを育てていく際、まず実物を手にとって観察し、その後 徐々に実物と距離をとりつつイメージを創るという手順が踏まれよう。実物に親しむという段階が必要不可欠なのであり、特に直観と論理の接点にいる中学1年生を対象にする場合は、なお一層留意しておかねばならない。実物に触れさせず、平面上に描かれた図を中心にしたがらの授業展開では、決してイメージ力の育成は期待できないのである。



また、イメージ力という場合、当然その中には、思い浮かべた心像を動的に変化させる力も含まれているのだが、そうした力を育む指導場面はほとんどないのが現状である。したがって、指導者自身が意識的にそのような場面を見出していかなければならないだろう。例えば、左の図は準正多面体の一つ立方八面体だが、これを次の観点から捉える経験も必要であろう。すなわち、立方体の8か所の隅を徐々に大きく切り落としていくと 最後には正八面体になるが、左の立体はそのような動的変化の途中の状態と見なすのである。

### (2)移動・切断・投影

平面図形における「移動や軌跡」は比較的大切にされているが、空間図形においても重視して扱うことで、イメージ力の育成・強化に資したいものである。また、移動してできる図形の頂点・辺・面等の数を帰納的に予想したり、それを実際に数え上げて確認するなどして、論理的な説明力の育成も期待できるのであり、この意味からも極めて重要な学習内容であると考えている。

また、「切断」も同様の観点から重要である。特に、様々な切断面を見取図上に描いていくような場面では、投影的な考え方は勿論のこと、これまでの学習内容を総動員する必要がある、中学校における空間・立体図形教育の一つの到達点にある教材と言えよう。

さらに、「投影」については、立体図形の投影図というに止まらず、直線・平面の位置関係を投影図から読み取るという学習場面も設定したい。そのことで、2直線が交わったり、ねじれの位置にあるということの意味がより広い観点から理解されるはずであり、また、論理的説明力を育む素地づくりとしても、あるいは画法幾何へ進む足がかりとしても有益であろう。

### (3)空間の初等幾何

空間・立体図形も初等幾何の対象として当然含まれているが、実際には平面上でユークリッド幾何的な考察が為されるだけで、空間に対しては専ら論理が軽視され、直観に頼り切った学習展開が進められている。結果として、生徒の知識や思考を支える根拠が不明確で感覚的な域を出ておらず、したがって空間における論理的な説明力は平面におけるそれとは比肩すべくもない散々なものになっている。直観と論理のバランスをもう少し改め、背理法などの証明方法も適宜指導しながら、空間における初等幾何についても、その入り口くらいは扱う必要があるだろう。

### (4)非ユークリッド幾何、射影幾何の導入

非ユークリッド幾何を扱うことで、まず、生徒の持っている直線などの概念を拡張させることができる。また、球面三角形の合同・相似条件や面積等について考察しながら、知的好奇心を呼び起こすとともに、既習事項がそのままの状態では通じない中で、自ら考え創っていくという感動を味わわせることも出来よう。また、射影幾何については、透視図をパイプにしながら画法幾何の基本的な知識も扱っておきたい。



### 3. 高等学校 図形・空間の学習における生徒の活動目標の設定

田中正男

大阪府西淀川高等学校

#### 1. 高校数学における「空間」学習の特徴と現状

図形、空間に関して、数学Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、A、B、Cの全科目の全ての内容を学ぶものと仮定すれば、およそ次のようなことがらを扱うことになっている。もちろん実際には全ての科目を履修するわけではないので、一般にはこのうちの一部だけを学習して高校数学を終える生徒が少なからずいることになる。

- |             |               |            |
|-------------|---------------|------------|
| (1) 図形と計量   | (3) 積分法       | (6) 行列と変換  |
| ・ 三角比       | ・ 面積          | (7) 曲線の方程式 |
| ・ 三角比と図形    | ・ 積分の応用としての体積 |            |
| ・ 図形の計量     | (4) 平面図形      |            |
| 相似形の面積比・体積比 | ・ 三角形の性質      |            |
| 球の表面積・体積    | ・ 円の性質        |            |
| (2) 図形と方程式  | (5) ベクトル      | (8) トピックス  |
| ・ 直線の方程式    | ・ 平面のベクトル     | (数学基礎)     |
| ・ 円の方程式     | ・ 空間のベクトル     |            |

高校数学においては、直接的に空間思考の育成を目標としない単元でも、空間の広がりや空間図形（立体）が具体的にイメージでき、図的表現がしっかりでき、さらには、空間における位置関係が把握できることを前提として指導内容が構成されている。

例えば、積分を使って立体の体積を求める場面では、これらの立体を念頭操作し、どんな図で問題場面を表現するかを選択が必要である。

これ以外の「空間」そのものに関する指導内容は、三角比、ベクトル、図形の方程式を用いるものに大別される。現状ではこれらの扱いにおいても、空間図形、直線と平面、平面どうしの位置関係のイメージや3次元のものを2次元に表すことも含めて図で自在に表せ、図から問題解決に必要な情報を抽出できることが前提とされている。

しかし現実には、この前提のところゆきづまったり、まったく手つかずで困難を訴える生徒が少なくない。立方体に含まれる直線、平面、ベクトルのなす角の大きさを求めるといった簡単なベクトルの問題ですら多くの指導のポイントを含んでいる。<sup>(1)(2)</sup>

したがって、高校の「空間」学習においても

- ・ 空間における位置関係を把握するのに慣れるために立体に触れたり立体を作ること
- ・ 見取り図、展開図、投影図などの図法それ自体に慣れること
- ・ 数学の学習で得られた知識、技能、表現力を他の場面で活用すること

のような活動を経験させる必要がある。このことは大阪高等学校数学教育会スローラーナー委員会の過去の研究・実践の結果からも伺い知ることができる。

## 2. 過去の研究・実践の結果から学ぶこと

大阪高等学校数学教育会スローラーナー委員会では「平面図形・空間」に関して、生徒の認識の問題点を探り、それら問題点を克服させることを目指し、

- ・ 図形の診断テスト
- ・ 学習カード

を作成し、

- ・ 学習カードのC A I教材づくり
- ・ コンピュータを用いた動画化 等々

に取り組んだ。その結果判明したことは、ある程度図形のイメージ力や、論理的思考により空間把握のできる生徒については、それらの生徒の陥りやすい間違いに気づかせ、正答へと導くには有効であったが、イメージ力や論理的思考が不得意な生徒にはあまり効果がなかったということである。<sup>(3)</sup> つまりたとえば、立方体の切断面の形状を判断するのに上の方法をすべて試みたが駄目で、実際に寒天でできた立方体を切って見せてようやく納得したり、展開図の学習では、紙で作った立方体を実際に切り開いてようやく納得するような生徒が一定数存在するのである。これらの生徒にとっては、「空間」学習におけるこれらの工夫もいわゆる「対症療法」の域を出ないのであった。

これが、「空間」学習が代数的分野の学習と大きく異なる点であると思われ、指導に時間がかかり、生徒にとっても難しいと感じられる理由の一つでもあろう。

## 3. 図形・空間の学習指導に影響を及ぼす諸条件（代数的分野との対比）

これまでの数学教育では、図形・空間に関する教材は、代数的分野の教材に比べて軽視され、その教材研究、指導法の研究もひどく遅れていたという指摘があり、その原因として、受験材料として適当でなかった、すなわち、出題型式が面倒であり、採点が機械的に行い難いことが挙げられる。<sup>(4)</sup>

ところで、図形・空間に関する教材が、代数的分野の教材に比べて軽視されがちであるという現状を生み出す要因は何かを知るには、次のような側面から考察してみる必要がある。

- ・ 数学教師の日常会話から
- ・ 授業形態、授業に要する時間の面から
- ・ 評価の面から
- ・ 教材・教具づくりの面から
- ・ 学習指導要領での扱いの変遷から
- ・ 教科書での扱い、教科書編集の現場で語られていることがらなどから
- ・ 生徒の空間認識の問題点から
- ・ 生徒の経験のバラツキが指導に及ぼす影響などの面から

概して言えば、代数的分野は比較的現在の授業形態や試験を中心にした評価がやりやすいと考えられているのに対し、図形、特に空間はこれと対極にあり、試験に出題したくない分野であると考えられる傾向にある。

このことから高校では、図形・空間の学習指導の開発にあたり重要なキーポイントは、

- ① 授業観、授業形態の変革
- ② 学習評価観の評価法の変革

であることが伺える。

#### 4. 図形・空間の学習における生徒の活動目標の設定

図形・空間の学習における生徒の活動目標を、生徒が「……できる」という側面から考えてみることにする。

小学校・中学校・高校における空間の学習指導（空間思考育成のための指導）を貫くものとして、筆者は現行の指導内容の他に次の2点を特に重視している。

- ① 3次元空間（生活空間）におけるさまざまな体験、活動を数学的活動につなげる。
- ② 多様な自分なりの表現をする活動を数学的表現活動につなげる。

具体的に高校の図形・空間の学習における生徒の活動目標として設定したいことを列挙すると、次のようなものが考えられる。

##### (1) 与えられた情報から空間図形をイメージできる

生活空間での経験、身の回りの事物の観察、立体の構成、立体の切断、絵を描く、といった活動経験に依拠するであろうが、高校生の場合、問題を読んでイメージすることが最終目標になる。

##### (2) 図で表現された情報から必要な情報を取り出すことができる

例えば、三角比・正弦定理・余弦定理の学習場面では三角形を取り出す必要がある。既知の数学の知識をもとにして、空間図形を分析し平面図形（この場合は主に三角形）に帰着させることが目標である。

##### (3) 図で表現された情報を論理的推論により正しく判断し関連づけることができる

図は3次元のものを2次元に変換したものである。したがって、例えば、見取図では角の大きさや辺の長さ等正しく保存されていない情報がある。すべて直観だけで処理できない複雑な問題の場合は論理的推論が重要である。論理的推論の助けを借りて図から正しい判断をし、そうして得られた情報を関連づけることができるようになることがここでの目標となりうる。

##### (4) いろいろの図的表現法が自由に使える

見取図による表現から、展開図、投影図、断面図のような別の図表現へと変換できること。また、問題場面を表すのに相応しい表現法を選択できるように、多様な表現法に習熟すること。さらには、空間の学習において、図は問題や思考過程の説明や伝達の方法として有効であることを理解し、活用すること。これらのことがここでの活動目標である。

##### (5) 数学的表現に持ち込み問題解決ができる

三角比やベクトルなどの数学的表現に持ち込み、分析をし、問題解決できる力をつけることは重要な活動目標である。とともに、ここでは数学的表記の有効性、エレガンス、数学的アイデアの発展における数学的表記の役割の真価が認められるようにしたいものである。

以下、これらの活動目標を教材・評価と関連づけ、いかに具体化するかの例である。

## 5. 教材と活動との関連でみる図形・空間の学習指導の開発の例

### (1) 三角比（正弦定理・余弦定理の活用）（第1学年）

活  
動

- 1 空間図形を分析し、問題を作る。
- 2 問題を分類する。
- 3 問題を文章、図、式などを用いて表現し、趣旨がよく伝わるようにする。
- 4 条件や求めるものを変更して違う問題へと変形する。
- 5 作った問題を公表し、それらの問題を解く。
- 6 解答と問題解決の方法を交流し、図・式など表現方法について考察する。

評  
価

- ・ 生徒の作った問題と説明図を点検する。
- ・ 生徒の発言を分析する。

### (2) 空間の座標と図形の方程式（立体の切断面を表現する）（第2学年）

活  
動

- 1 立体の切断面の概形をスケッチする。
- 2 座標軸と変数を設定し、立体の切断面を構成する図形を方程式で表す。
- 3 立体の切断面を構成する図形の辺などの長さを式で表す。
- 4 切断面の面積を式で表す。
- 5 造形作品の設計図と完成イメージ図を描く。

評  
価

- ・ 生徒のかいた図、数式などの表現を点検する。
- ・ 生徒の作品完成イメージ図と設計図とを観点を定めて詳細に分析する。

### 《引用・参考文献》

- (1) 田中正男：「どのような学力の育成をねらうのか」  
狭間節子（研究代表者）『数学教育における空間思考の育成に関する研究』（平成9  
－11年度科学研究費による研究成果報告書），2000.
- (2) 利根川誠：「高校生の空間図形に対する認識と分析力」『1984年度数学教育学会春季  
年会発表論文集』，1984.
- (3) 疋田直樹：「図形分野の理解構造の解明と治療実践」『大阪高等学校数学教育会会誌  
第34号』，1993.
- (4) 平林一栄：「空間・立体に関する教材研究」  
狭間節子（研究代表者）『数学教育における空間思考の育成に関する研究』（平成9  
－11年度科学研究費による研究成果報告書），2000.