

第1章

児童・生徒の空間思考の発達に関する基礎的研究

狭間節子・橋本是浩・赤井利行・井上正人・東尾晃世・荊木聡・中西正治・
坂本宏和・加波忠弘・田中正人・吉武進

1. 空間思考の発達の指標の抽出に至る基礎的研究
2. 空間思考を育成する教材開発・指導法開発の実践的研究

1. 児童・生徒の空間思考の発達の指標の抽出に至る基礎的研究

1. はじめに

立体・空間図形の学習では、具体物を扱う場合には直接には見えない部分や空間関係を念頭で補足したり、具体的な操作の結果を予想したり、また、図をもとにする場合は、図では失われている空間関係を補足して、念頭で動かしたり、変形したり、逆の操作をすることが必要になる。このように空間図形の学習では、平面図形の知識や思考に加えて、空間図形特有の思考が必要になる。

現在の立体・空間図形の学習指導ではこの側面は児童・生徒個人の発達に任せ、学習指導では見過ごされている。

他方、児童・生徒の多くは高学年になるにつれて、空間図形は苦手、イメージがもてない、必要な図表現ができない、もっている知識を使えないなどの傾向が顕著になる。かれらは空間図形の学習や問題解決で、何らかのイメージをつくり操作しているだろうが、はっきりとは意識していず、学習に生かせていない。

立体・空間の学習や問題解決の過程で、児童・生徒はどのようなイメージをもち、心的操作を行っているのか、それらを何らかの方法で特徴づけることはできるのか、学年の進行とともにどのような発達の傾向を示すのか、具体的操作、図表現、図形的知識・技能とイメージ操作との関連はどうかなどに関する研究はわが国ではほとんどない。このようなねらいで児童・生徒の空間思考の発達に関する基礎的研究に取りかかった。

本章では、本報告書の主題「空間思考の育成の視座からの図形・空間カリキュラム開発研究」の基礎をなす児童・生徒の空間思考の発達に関する基礎的研究[1]を概略的に報告する（なお、本稿は拙著[10]を加筆・修正した）。

2. 児童・生徒の空間思考に関する基礎的研究の目的

目的を次の点においた。

- (1) 立体・空間に関する問題について、小学1年生～高校3年生の思考の実態を調査分析し、空間思考の特徴および発達の傾向を明らかにする。
- (2) (1)の結果に基づき、そこで提起した仮説や問題点を実践を通して検証し、小学～高校を視野に入れ、空間思考の育成の学習指導の枠組みを構想する。
- (3) 空間思考の育成に向けて教材開発と指導実践を行う。

3. 先行研究との関連

「空間思考」という用語はわが国ではなじみが薄い。加藤は、空間学習の本質と使命を3点に要約し、その一つに、「空間の考え方の陶冶によって、正しい空間考察力・判断力・想像力・創作力などの空間思考力を練り、…」をあげている[2]。「空間思考」の指導例として、「豆細工による立体構成作業」によって、陵と頂点を取り扱うが、「更に空間思考力が追々に発展して面を想像し、面の形及び数を認識せしめるように発展していく」、「箱を十文字にしぼる場合の紐の長さを、箱の陵の観察によって、概算する」などを取りあげている。

「空間思考」と関連の深いものに、「空間観念」や「空間直観力」がある。新算数教育研究会編による書[3]では、「空間観念」を、「目に見える具体的な物あるいは、感覚的にとらえられる物を通して、その背後にある空間としての抽象的・理想的なものを感知することができる力」ととらえ、「直観的に図形を認める力」「立体を図で表現する力」「立体を構成する力」「位置をとらえる力」「立体の広がりや量を量的にとらえる力」を特定している。

国本は、上記5つに「操作を見通す力」「図形を見抜く力」「空間自由移動能力」を加えた諸能力の総体として、「空間直観力」を規定している[4]。そして、「空間直観力」育成のための「暗（念頭）幾何」を提案している。

新算研編の「空間観念」においても、国本の「空間直観力」においても、それぞれを構成する諸能力を前提し、それらの諸力が働くような具体的な操作活動を通して育成を図る。さらに、前者では、具体物と立体図形や図形的用語とを結びつけるものとして「イメージ」を位置づけ、念頭操作への志向がうかがえる。一方後者は、具体的操作から徐々に離れて、最終的には、物理的モデルや平面的・図的表現は記憶の支えとして使用せず、唯一幾何的対象に関する表象と言語的に示された知識だけで操作を行う、ことをめざしている。両者のアプローチは「空間思考」へ迫る可能性を示唆しているが、それらの諸能力の相互の関連性や児童・生徒の発達の傾向への言及は見られない。

平林は、「空間・立体図形指導の分野」には、相互に関連している三つ「①心像（mental image）の形成 ②知識・技能の形成 ③図的表現法の習得」があることおよび「①は知識の主観的側面、②はその客観的側面と考えられる。いわゆる学校での「幾何」は主として②であろうが、それは①に支えられてはじめて、本人にとって使える知識・技能となるものと思われ、これまで①はひどく軽視されてきた。」と指摘する[5]。

筆者らの研究は、先述の両者のアプローチとは異なり、平林の主張に近く、かつ児童・生徒の思考の実態から「空間思考」にアプローチするものである。

4. 空間思考をとらえる観点

本研究では、ヤキマンスカヤの概念規定[6]をもとに、空間思考を、「実在的空間および抽象的空間に関わる課題遂行場面で、いろいろな直観的支えをもとに、空間的心像をつくり心的操作をする知的活動」ととらえる。空間的心像は絵のような素朴なものから、その最も発達した形式では、空間的關係と性質が心像に反映したものをさす。（以下では、「空間的心像」を、単に「心像」または「イメージ」とも書く。）

学習で用いられる直観的支えを、現実からの離れ具合と直観性の機能の違いによって、次の3つのタイプに区別する。

ア. 具体的モデル（事物、模型、写真、ビデオの映像など）

実在の対象との類似性を持ち、外面的な性質—形、大きさ、部分と全体などの具体的な性質や個々の構成部分など—を伝える。対象の具象的なイメージをつくる直観的な支えとなり、情意的背景をつくる。

イ. 規約的な図（見取図、展開図、投影図、切断面図、地図など）

規約性、概略性、一面性などによって、アのタイプと区別でき、直接の知覚から隠れた対象の性質—構造、幾何的形、長さの比、個々の構成要素の空間関係など—を伝える。

ウ. 言語、記号、式など

概念や抽象的、一般的な構成関係や結合関係を示す。

(コンピュータの画像は、アまたはイにはいる。)

上記の各タイプのモデルは機能に違いがあり、各モデル間の相互の関連(例えば、具体物の箱と、その見取図や展開図と、概念を表す用語「直方体」、「立方体」との間の関連)を直接示してはいない。学習者がそれらの間に関連をつけることができるのは、そのねらいにあったそれぞれのモデルへの働きかけを通して形成したイメージとその操作に依存するところが大きい。

Hershkowitz, R.らは、イメージの役割について、「生徒が空間と形とを図と関連づけることを学び始めるとき、実在の対象と図/シンボルとの間に直接の関連はない、どのような関連もイメージにおいて具体化される」こと、およびその学習指導の重要性を指摘している[7]。

また、図の間にもそれぞれ機能や次元の違いがあり、従って、児童・生徒の図のとらえ方も異なる。Dowdall, R.は、認識論的な観点から、図の把握について、「知覚的把握」と、図の規約や定義に結びついた「推論的把握」とを大別し、後者は、「次元の変化」と「拠り所の変化」をもたらすこと、および幾何における視覚化は、

「次元の変化、操作的変化(図的变化)、拠り所の変化のうち、少なくとも一つを必ずもたらす」

と指摘している[8]。

児童・生徒の空間思考の特徴および発達を、次の観点から、調査し考察した。

- ① 図をもとにする対象のイメージの形成
- ② 心的操作の主なタイプ
 - (i) 対象の空間的位置や向きを変える操作(回転、移動など)
 - (ii) 対象の構造を変える操作(変形、展開・構成、投影、切断など)
 - (iii) (i)と(ii)の合成操作
- ③ 操作の柔軟性
 - (i) 前記直観的な支えア、イ、ウの間の移行の可能性と容易さ
 - (ii) 規約的な図(見取図、展開図、投影的な図、切断面図、地図など)の間の移行の可能性と容易さ
- ④ 図表現、言語・記号・式による表現
- ⑤ 空間における定位
- ⑥ 視点の変更と統合

これらの観点で調査問題(後述)を作成し、調査した。

5. 調査の概要

大阪、広島、島根地区の公立、国立の小・中学生および公立の高校生を対象に、第一次調査(1998)と第2次調査(1999)を行った(資料1)。調査は問題紙による調査を基本とし、調査後、抽出学級の数名にインタビューを行った。

調査問題は第一次、第二次ともに7題で、各小問からなる。小学～高校で、各問題のねらいは共通で、問題場面の提示で情報内容と量、ゴールへの過程の長短、難易度、用語、記号、図・絵などを変えている。第二次では第一次との類似問題2題を含む。

第一次・第二次調査を次の面から分析・考察した。

1) 基本集計結果（公立学校の集計結果をさす）

2) 児童・生徒のメモ書き

問題で求められている以外にかかれた図・文字・記号表示などを指す。1)には現れない思考過程の断面や困難点を分析する。

3) 担任教師によるインタビューの内容

1),2)には現れない言葉による説明や思考のより深い層をとらえる。

6. 第一次調査結果の概要

まず、第一次調査結果の集計から、結果の全体像をとらえた。学年が上がるにつれて、正答率は上昇するが、次の5段階の間、とくに、小学4年と5-6年の間、中学と高校の間で、顕著な伸びと変容がみられた。

第1段階（小学1-3年）では、問題によって、学年によって、正答率に振動がある。図の見え、一面的な視点、形にとらわれるなどの特徴がある。

第2段階（小学4年）は、第1段階と第3段階とは区別できる。小問の正答率で、第1段階とは異なり、ある過程までの正しい判断の絞り込みがみられる。

第3段階（小学5-6年）は各問題の正答率のグラフの外形は全体として、第4-5段階の縮小である。

第4-5段階、第4段階（中学）では、立体の回転、変形、投影的な見方、視点の変更などの問題では正答率は7割ラインを振動しているが、応用面で弱い。

第5段階（高校）では、個人差、学校差が大きい。

男女差 いくつかの問題で男女差がみられた。とくに、立体の回転、変形、投影的な見方、視点の変更・統合などの問題では、第3段階以降で差（男>女）が顕著になり、それ以降にもち越す。

7. 児童・生徒の空間思考の特徴の分析

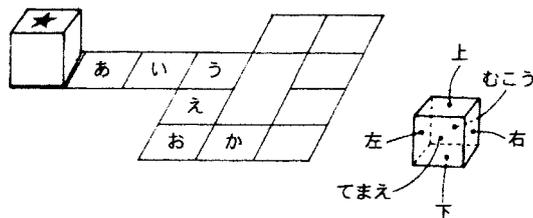
(1) 「サイコロころがし」のイメージと操作の特徴

次の問題は小学5-6年用。1-4年は「立方体」を「サイコロ」に、★を●に変え、中学・高校用は図のマス目を順に（き）（く）…（G）と進み、（お）（か）（く）（G）の位置にきたときを求める。

問題1. 立方体を（あ）から順に（か）の位置までころがします。

立方体が、（う）、（お）、（か）の位置にきたとき、★がかいてある面は、あなたから見て、立方体のどの面にありますか。

あてはまるものを○でかこんでください。（選択肢略）



(1)-1. メモ書きから捉えるイメージと操作の特徴

この問題ではメモ書きが多い（すべてフリーハンドによる）。児童・生徒のメモ書きは、表1に示す。

表示分類表
(表1)

		表示例	
		(1) ゴールまで表示	(2) 部分的に表示
I 図表示	①見取図		
	②簡略		
	③矢印		
	④平面的		
II 文字・記号表示	①立体への対応		
	②面の位置		
	③矢印		
III 目印	要所		

メモ書きは、I図表示、II文字・記号表示、III目印に分類でき、それぞれ、(1)目的地まですべて表示、(2)部分または要所表示、に分けられる。例の●印は小学2-4年、★印は小学5年～高校の例である。

メモ書きは、小3、4年から独自の表示が多様に出てき、矢印も使われる。見取図とその簡略図は小4-6年と高校で使われ、中学では使用なし。中学・高校では表示法が簡略化に向かう。

表示使用者のゴールまでの正答率は、全体の基本集計のそれよりも高い。小学では図表示の正答率が最も高い。高校ではどの表示も正答率は9割弱と高い。‘い’の目印表示は、小6年～高校で使われているが、ほぼ10割の正答率である。

この問題では、図から立方体のイメージをつくり、念頭回転が必要である。表示例は、それを描いた子どもがどのようなイメージをもち、操作しているかの反映とみることができる。メモ書きから、イメージとその操作の特徴として、次の諸点を仮説とした。

1. 回転操作の結果を表す表示か、回転の操作を表す表示かの違いがある。
2. 念頭操作の区間が長くなる方向に向かう：
 - a.1回転ごと
 - b.要所要所の間
 - c.特徴的な箇所を目印表示
 - d.ゴールまですべて
3. 立方体の部分に着目し、徐々に、対象の低次元化に向かう：3D→2D→1D→0D

3D：立方体（3次元的像） 2D：立方体の●面や★面に焦点化
1D：立方体の辺への焦点化
0D：★面の操作のシンボル化（★面を点で、回転を矢線で表すなど）または
操作そのものへの焦点化
4. 立方体の次元を下げた操作が適切であるためには、低次元化に応じて、対象の構成要素や空間関係を保ったイメージ操作が必要である。

(1)－2. 空間的思考の発達の指標

インタビュー内容の分析をもとに、上記の仮説を検証し、この問題における空間的思考の発達の指標を抽出した。

小学校段階

- A** 図を見てサイコロを動かそうとするが、動かせない。
B 手を使って具体物を転がす身振りにもとづく。
サイコロを片手でもつしぐさで、●面にあたる場所に指や鉛筆を当てて、1回転ごとに転がす。
C 立方体にかわる具体物の回転のイメージがもてる。
「ボールが転がるときのヘソを想像して」●印に指や鉛筆を当てて動かす。
D 立方体（積み木）の回転のイメージがもてる。「頭で積み木を転がしてみて」
そのあと場面に当てはめる。
E イメージで回転操作をしている。「頭の中で転がして」★面の位置をきめる。

中学校段階

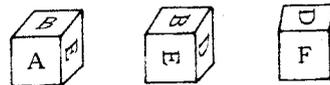
- D** 回転のイメージがもてる。
・1マスずつ、または立ち止まりながら転がす。
・1マスずつまたは要所に記号や見取図をかく。
E イメージで連続回転する。メモ書きがないのが特徴である。操作が滑らかで、
かなり正確に、素早くゴールへ達する。
・立方体全体を回転する
・★面に焦点化して回転する

小学校段階の指標 B、C では、方向転換で、●面の位置が見えない面から、見えない面
に変わるところが難しい。指標 C と D の違いは、C では立方体の代用物の動きを想起して、
立方体の回転との関連づけが主となり、指標 D では立方体の性質を保って操作を行うが、
行き詰まり、立ち止まり、図で確認しながら進める。指標 E では対象の空間関係を保って、
心的回転をしている。

(2)「立方体の面の同定」における操作の柔軟性

次の問題は中学生用。小学用では面の文字あ、い、…を用い、高校用では、記号○、×、◎、
●、■、□を用いた。

問題2. 右の図は、同じ立方体を3つの方向から
見たものです。立方体の面には、それぞれ、
文字 A, B, C, D, E, F がかいてあります。
E 面の反対側の面には、どの文字がありますか。



(2)－1. メモ書きの特徴

E 面の対面をきめるには、3つの見取図から、回転や視点の変更、展開等によって面の

関係の情報を統合しなければならない。小・中学の問題では、文字の向きを面のつながりの判断に使えるが、高校では向きのない記号を用いているため、面の関係の統合が難しい。

この問題ではメモ書きが最も多く、小5-6年から増え、多様になる。表示別では、見取図に見えない面をかき込んだものが最も多く、その正答率は小学で6割、中学で8割、高校で7.5割と高い。展開図や対面消去などの記号表示は少数であるが、小5年以上で用いられ、正答率が高い。見取図、展開図及び記号の併用は、必ずしも正答に結びつかない。

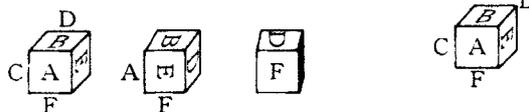
次に中学段階の表示例をあげる(図1)。

I 図表示

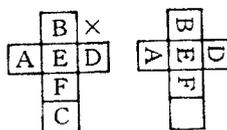
(図1)

①見取図 (7)

(1)



②展開図



II 記号表示

①消去

A B C D E F

②対面 A B C D E F

| |
D E

(2)-2. 操作の柔軟性

対面の決定では、立方体の回転、面の展開、視点の変更などによって、面の関係の情報をを読み取り、統合する過程で、さまざまな表示が用いられ、それらの間の相互変換が頻繁に行われている。例えば、

見取図 \longleftrightarrow 見取図； 見取図 \longleftrightarrow 展開図； 見取図 \longleftrightarrow 記号

などの表現間の変換である。これらの変換で意味のある関連をつくるのは心的操作である。そこではイメージの切り換えや調整が行われていると考えられるが、面のつながりや対面の関係を保っていないければ、適切には働かない。とくに高校の図表示の多さ、および複数の展開図を用いた例に、その困難さが現れている。

イメージ操作の柔軟性に関して、次の諸点が観察された。

1. 見取図、展開図、記号表示の間の変換では、それらにもとづくイメージの切り換えと調整を必要とする。見取図と複数展開図の間の変換ではそれらの操作が困難になる。
2. 対象の低次元化は、3D \rightarrow 2D \rightarrow 0D(記号化・シボルム化)に向かう。
3. 操作の柔軟性は、表示間の変換の容易さと対象の低次元化に関連する。

(2)-3. 推論の根拠

中学校段階のインタビューをもとに、対面決定における推論とその根拠に焦点を当てる。

①論理的根拠がない

ア。「見取図にC面がないからC」

イ。全くの勘に頼っている場合と面の関係を決定しようとしている場合とがあるが、イメージが乏しいため操作で結びつけることができない。

②論理的根拠に基づく

ア. 第1・第2の見取図の情報のみ結合

一方を90°回転して、共通面(B面とC面)を同じ向きにする。

イ. 第1・第2の見取図の情報を結合するが、第3の情報との統合がうまくいかない。

ウ. 3つの情報を統合

①D面とF面の位置関係に注目した念頭回転が最も多い。辺を軸とする回転の合成や立方体の対角線を回転の軸とするものも多いた。

②展開図と見取図を用いて統合する(少数)。この場合、イメージをほとんど用いず処理している。

③第3の見取図のDの向きに注意してF面を統合する。

(3) 視点の変更・投影的な見方と回転

次の問題は小学～高校で共通。

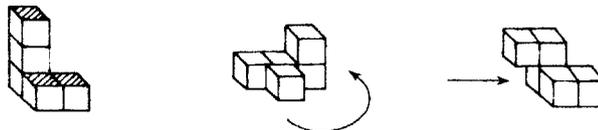
問題3. 板の上に、同じ立方体を3つのせて、回りを切りぬいて、図1のように穴をあけました。

図の①～⑤のかたちは、上と同じ立方体を5つつないで作ったものです。

板の穴を通りぬけができるのは、①～⑤のどれですか。ぜんぶえらんで、番号をかいてください。

この問題では、念頭操作が比較的に簡単のため、どの学年もメモ書きが少ない。中学以上で、穴と合同な側面の図示、回転や穴通しの方向の矢印などが用いられている(図2)。

(図2)



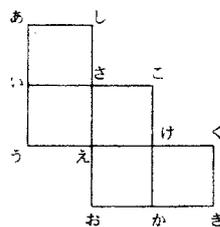
インタビューをもとに、次の発達の指標を抽出した。

<p>A 穴の形と見取図の形の見えにもとづく 「①は穴と同じ形だから通る」</p> <p>B 見取図の特徴的な部分に注目し、積み木の付き方、縦と横の個数にもとづく 「②は1つ真ん中についているから穴に当たる」</p>	
<p>視点の変更から投影的な見方へ</p> <p>C 穴と「同じ向き同じ形」に見えるところに視点を変更する</p> <p>D 穴と「同じ向き同じ形」を通りぬける方向に視点を変更する</p> <p>E 投影的な見方ができ、通り向けの方角を指定する。穴の向きも自由になっている</p>	<p>回転</p> <p>C 穴と「同じ向き同じ形」になる向きに、面上で、空間内で、回転する</p> <p>D 穴と「同じ向き同じ形」を通りぬける方向に回転する</p> <p>E 通りぬける方向に回転。穴の向きも自由になっている</p>

(4) 展開図からの立体構成

小学～高校共通問題。

問題4. 立方体を作りたいのですが、面が1つ足りません。もう1面をどの辺につければよいですか。よいと思うところをぜんぶ見つけて、○をつけてください。



展開図からの立体構成の発達の指標である。

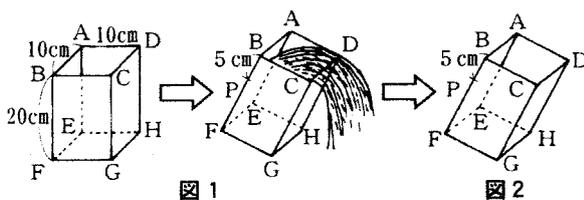
- A 展開図の形にもとづく
- B 底面をきめて、手を使って順に組み立てるしぐさにもとづく
- C 立方体構成のイメージがもてる
- D 構成したとき、展開図で接合する2辺に着目する
- E 接合する2辺だけに着目して素早く統合する

指標 A～E のそれぞれで、さらに細かに分岐する。指標 C で構成できるかどうかの節目は小学4年と5年の間にあり、4年の立体の学習内容との関連が深い。D, E では、「展開図が対称だから、面がここにつくなら、ここ（別の辺）にもつくはず」や展開図で「接合する辺を除いていく」などの論理的根拠に基づく例が小学5年以上でみられた。ここでは、 $2D \longleftrightarrow 3D$; $2D \longleftrightarrow 3D \longleftrightarrow 1D$ などの次元の変化を伴うイメージ操作が必要になる。

(5) 応用課題における空間的推論

次の問題は中学・高校用。小学5-6年は①と②。

問題5. 図1は四角柱の形をした容器で、水がいっぱい入っています。容器の一边GHを軸にして、水面が図2のPの位置にくるまで、静かに傾けて水をこぼしました。



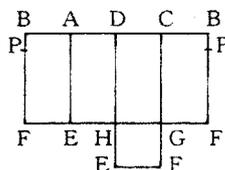
①図2の水面の部分に線をかきいれてください。

②右の図は容器の展開図です。

図2で水につかっているのは展開図のどの部分ですか。

水面の線をかきいれてください。

③図1の容器を傾けて水をこぼし、残った水の体積が容器の体積の3/4になるようにします。そのためには、辺GHを軸として何度傾けたらよいですか。



ここでは、問題場面のイメージをもとに、①で見取図、②で展開図をかき、③で立体に

関する知識との統合を必要とする。

(5)-1. 問①、②の図表現の分類と操作の特徴

児童・生徒の描いた①見取図と②展開図の分類と反応率は次の通りである。

(表2) 見取図・展開図の反応率(%) (基本集計)

図表示分類の観点	小5-6年		中1-3年		高1-3年	
	見取図	展開図	見取図	展開図	見取図	展開図
1. 容器の傾きに適切な水面線	15	14	41	34	75	74
2. 1の不十分	18	1	10	4	6	4
3. 容器の底面に平行な水面線	23	46	19	26	4	4
4. 3の不十分	16	2	4	3	2	2
5. その他(3,4とは異質)	11	18	14	22	7	10
6 無答	17	19	12	11	6	6

見取図で、小学校段階では十分予想できる容器の底面に平行な水面の線またはその一部(分類1,2)を描いているのは、小5-6年で4割、中学でも2割強いる。分類5その他は3,4とは異質で、2や1への移行過程と捉えられる。分類1, 3, 5の例をあげる。

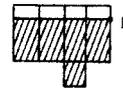
図表現の例

(図3)

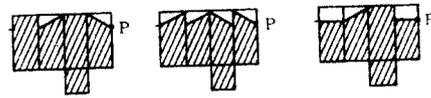
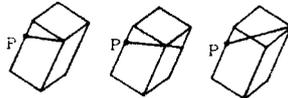
1. 適切



3. 底面に平行



5. その他



展開図に表すのは、見取図以上に難しい。上の表の小学・中学の見取図と展開図の数値を比べると、展開図では、分類3,5への後戻りが見られる。

容器から水をこぼす場面を日常経験し、必要な幾何的知識をもっているにもかかわらず、容器をある状態で静止し、操作することに抵抗があるようである。見取図2,4,5では多くが手前に見える側面に1本だけ水面線をかいてあり、他の側面の水面のイメージがもてないか、水面線をかき入れることに抵抗があるようである。とくに中学校段階のイメージの乏しさ、図表現力の低さは注目すべきである。

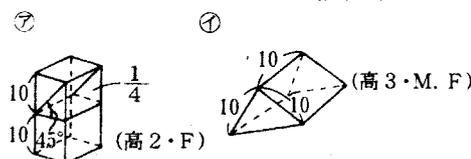
(5)-2. 問③における空間思考

問③は中学・高校用である。基本集計における正答率は中学で15%、高校で38%と非常に低い。中学ではほとんどメモ書きがない。次の図表示例は高校、式表示例は中・高校の例である。

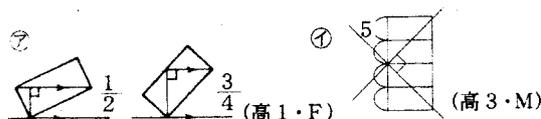
(図4)

I 図表示

①見取図



②投影図



Ⅱ式 $90 \div 4 = 22.5$; $90 \times 3/4 = 67.5$ $180 \div 4 = 45$; $10 \times 10 \times X = 1/2 = 500$, $X = 10$ など
 中学・高校の式表示のみ使用は（1例を除いて）誤答で、体積 $1/4$ と傾斜角 $1/4$ とを単純に結びつけている。

中学 1-3 年（38 人）のインタビューから、傾斜角決定における推論の根拠に注目する。

1. 論理的な根拠がない

ア. 「わからない」（8 人；①,②とも誤答）

イ. 見取図から、「山勘で」（ $50^\circ, 60^\circ$ ）；「適当に」（ 45° ）；「 90° では傾きすぎだから」（全部で 15 人）

2. 論理的根拠にもとづく

ア. 45° になる根拠を図や説明の断片で示すが、筋道立てて説明できない。（2 人）

イ. 45° になる根拠を説明する。（3 人；①,②とも正答）

この問題解決では、イメージの形成と操作、図表現および幾何的知識・技能の三者が相補的に働くことによって、成功度が高いことを示している。

8. 児童・生徒の空間思考の発達の指標の抽出

操作のタイプ（回転；構成、展開、投影；それらの合成）、視点の変更と統合に関する問題を中心に、児童・生徒の空間思考の発達の指標を抽出し、次のように要約できる。

- N 問題の情報の意味づけができない。
- A 図の外形や見えによって、図の意味する対象を視覚的に、静的に捉える。
- B 図の意味する対象を物的に捉え、手や身体を使って物理的操作に類似させる。
物理的操作はイメージ操作の源になる。
- C 構成要素で把握される対象のイメージをもち、操作を行うが、そこでは対象の空間的性質と操作との関連づけが主要となる。
視点の変更や、対象のある部分への焦点化が現れる。独自の図表現が関連づけの分析に使われる。
- D 対象の構造や空間関係を保って、イメージ操作を行う。対象の部分への焦点化、次元の変化、視点の変更・統合がなされる。規約的な図、その簡略図、操作を表す図が用いられ、図的表示の間の変換と調整がなされる。
- E 操作そのものへの焦点化がなされる。そこでは、対象の空間的性質（立体の対称性など）の利用、投影的な見方、操作のアルゴリズム化、論理的推論などにもとづいている。操作が素早く、ほぼ正確で、一般には図表現を必要としない。

指標 C,D では、操作の区間の長さ、対象の部分への焦点化、イメージの次元などに違いがあり、図的表現に現れる。指標 C と D との主な違いは、C では対象の空間的性質と操作との関連づけが主となるイメージ操作を行うのに対して、D ではその関連を保ったイメー

ジ操作といえよう。C,D で多く用いられる図表現は、C では操作に向けての情報の分析と統合のために、D では操作の予想と確認のために、一定の役割を果たしている。とくに記号表現は中学校段階で有効に働く。

「サイコロころがし」の回転ように、問題の文脈によって、イメージしやすく、容易に習得されるものから、問題5③のように、場面のイメージがもてない、操作できない、図が描けない、もっている知識を生かせないなどが連動して、ほとんどの生徒が手に負えないものもある。一般的には、イメージ操作、図・言語・記号表現、幾何的知識・技能の三者が相乗的に働くことによって、空間思考は有効に働くといえよう。

ここで取りあげた問題は調査問題の一部である。空間思考は、机上のミクロな空間だけを対象とするのではなく、マクロな生活空間の中に位置づける必要がある。調査問題中の「遊園地の写真の撮影位置を絵地図上にきめ、理由を説明する」や「2つの円を用いて遠近のわかる絵をかく」などの問題については、別に考察した。

空間思考は全体的には学年との進行とともに発達していくが、とくに、小学4年と5-6年の間および、中学と高校の間（一部には中1年と2年の間）で、顕著な伸びと変容が検証された。この要因の一つには、調査当時の小学・中学の学習内容・技能との関連があげられる。次に、前者、小4年と5-6年の間に関しては、小学4年頃を境にして、自己流を含めた図的表現などの視覚化の力や言葉を用いて説明する力が急速に伸びていることが指摘できる。図的表現や言葉による説明を通して、各自の空間的イメージを意識し、精査し、表現すると考えられる。

他方、空間思考の発達には個人差があり、学年の進行とともに大きくなることは、基本集計にもインタビューにも現れている。小学校段階では、一般的に、同じ児童が問題によって異なる指標に位置している。たとえば、ある問題で、指標DまたはEに位置する児童が他の問題でも同じ指標に位置するわけではない。

中学校段階では、次の傾向を指摘できる。ある場面でイメージを活用する生徒は、他の場面でも積極的に活用する傾向にあり、他方、知識、論理的思考にのみ頼る生徒は他の場面でもその傾向が強い。イメージを活用する生徒は、明確な像を形成できる者と曖昧な像しか形成できない者とのわかれ、前者はイメージが論理的見方・考え方のチェック機能を果たし、論理的アプローチもしっかりしている場合が多い。しかしその逆はいえない。

高校段階では、個人差はさらに大きくなる。

空間的イメージの形成と操作、図的表現や言語・記号表現とその活用、および幾何的知識・技能とが相乗して働く空間思考の育成が、小学・中学・高校の算数・数学教育に位置づけられることが必要であり、そのための教材開発と学習指導の開発がなされなければならない。

(資料1) 第二次調査対象 (人数)

		1年	2年	3年	4年	5年	6年
公立	小学	119	132	135	129	133	138
	中学	94	107	96	—	—	—
	高校	76	—	—	—	—	—
国立	小学	77	77	76	78	77	78

[引用・参考文献]

1. 狭間節子（研究代表）（2000）平成 9・11 年度科研成果報告書 数学教育における空間思考の育成に関する研究.
2. 加藤義重（1937）空間観念陶冶の本質と新指導,成美堂
3. 新算数教育研究会編（1991）豊かな空間観念を育てる,東洋館出版
4. 国本景亀（1995）、空間直視力育成のための一提案一暗（念頭）幾何の提案一,第 28 回数学教育論文発表会論文集
5. 平林一榮（2000）前掲 1 ,pp.179-182
6. Якиманская, И.С.(1980) Развитие Пространственного Мышления Школьников, Педагогика.
7. Hershkowitz, R. 他（1996）Space and Shape, International Handbook of Mathematics Education, Bishop, A.他編、Kluwer Academic Pub.
8. Duval R.(1998) Geometry from a Cognitive Point of View, Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21 Century, Kluwer Academic Pub.
10. 狭間節子・橋本是浩・赤井利行・井上正人・東尾晃世・荊木聡・中西正治・坂本宏和・加波忠弘・田中正人・吉武進（2003）児童・生徒の空間思考に関する基礎的研究,大阪数学教育会・会誌,第 27 号,pp.48-55

2. 空間思考を育成する教材開発・指導法開発の実践的研究

1. 空間思考を育成する算数・数学的活動の4つの柱

前節において、児童・生徒の空間思考の発達の指標とその特徴を抽出した。次の研究課題として、空間思考の育成に焦点をあて、小学・中学・高校の教材開発と指導法の開発に取り組んだ。そのために、空間思考の発達の指標を基に、空間思考を育成する算数・数学的活動を次の4つの柱で構成した：**対象への接近と働きかけ、空間像の形成と操作、表現と表現間の変換、及び空間的推論とそのよりどころ。**

① 対象への接近・働きかけ：学習対象と事物・現象、図、及び概念や関係を表す言語・記号とをつなぐ活動

(i) 3次元の事物・現象、模型などを用いた観察、実験・実測、操作的活動。

これらの活動は空間像の形成と心的操作の源になる。

(ii) 写真、図的なもの、規約的な図（見取図、展開図、投影図など）、パソコン画像などの2次元表現を用いた、空間図形や関係の情報の読み取り、分析および表現

(iii) 概念や関係を表す言語・記号、式表現とそれらを用いた説明

② 空間的イメージの形成と操作

(i) 3次元事物を捉える視点の変更と統合、投影的な見方や回転の見方の基礎

ア. 見やすい特徴的な1点から イ. 自分が動いて；事物を動かして

ウ. いくつかの視点から エ. 視点の自由な変更と統合

(ii) 空間における定位

ア. 自分の身体を軸にして、空間における対象を位置づける

イ. ある対象を軸にして、それと他との関係を位置づける

ウ. 基準を自由に変更して、対象相互の間の関係をつける

エ. 3次元空間座標系へ向かう

(iii) 図表現に基づく空間的イメージの（心的）操作

ア. 対象の位置や向きを変える操作（回転、移動など）

イ. 対象の構造を変える操作（合成・分解、変形、展開・構成、投影、切断など）

ウ. アとイの合成操作

それぞれの操作に応じて、対象のある側面（面、辺、点）に着目し、そこに焦点化した操作を行う方向に向かう。ここで、対象の次元の変化が生じるが、心的操作が適切に働くためには、対象の構成要素や空間関係を保った操作であることが必要になる。

③ 表現と表現間の変換

つぎに示す方向に向かう各過程で、必要に応じて、身振り手振りによる表現、子ども言葉による表現、フリーハンドによる図表現を用いる。

(i) 具体物、立体模型、空間関係の具体モデルの利用

(ii) 立体や空間関係の図表現の表し方と図表現からの情報の読み取り

(iii) いろいろな図表現の間の変換

(iv) 概念や関係を表す言語・記号・式等を用いた表現と説明

第1節で指摘したように、心的操作の柔軟性は、図表現の間の変換、対象の部分へ

④ 空間的推論とその拠り所

事物を用いた感覚的、視覚的な判断や実験、具体的操作に基づく判断・推測から、図表現に基づく空間像の操作、図形の知識・技能などを相補的に用いる推論へ向かう。

2. 空間思考を育成する教材開発・指導法開発の実践的研究

空間思考を育成する算数・数学的活動を上記4つの柱で構成し、小学～高校を対象に、教材及び指導法の開発研究を行い、指導実践を行った[1]。小学・中学・高校段階の「空間思考を育成する教材開発と指導の全体構想」の部分、資料として、引用しておく。

教材開発では、基本的な空間図形にとどまらず、生活、遊び、アートの空間に視野を広げ、教具・模型の工夫・制作、コンピュータの使用などを含む指導法の開発がなされた。

特に、小学・中学・高校段階で、空間思考の共通する側面に焦点を当てたテーマを設定し、関連性を考慮に入れて計画実践した。実践編の構成は次の通りである。

実践編Ⅰ 空間思考の育成と変容—小学・中学・高校共通テーマによる実践編—

テーマ1 視点の変更と投影的見方

テーマ2 空間における位置・位置関係

テーマ3 立体の切断

テーマ4 空間における回転

実践編Ⅱ 空間思考の育成：小学校、中学校、高校における各実践例

上記実践編は素材開発と学習指導開発の両面から、各指導者の独創性と実践研究の深さが発揮されている。最終章は、「空間思考を豊かにする素材の発掘」である。

3. 図形・空間カリキュラム開発研究への示唆

これらの教材・指導法の開発研究・実践を通して、多くの成果と課題が得られ、他方、図形・空間のカリキュラム開発研究の必要に関してつぎの諸点が示唆される。

(1) 教材開発と指導法の改善によって、児童・生徒の空間思考を伸ばすことができる。

そのためには、次ぎの諸点が必要になる。

① 空間思考を直接のねらいとする（指導者、学習者ともにそのねらいを意識した）
教材開発研究と指導法の改善

② 視野を広げた教材開発研究

基本的な平面図形や立体・空間図形を応用する活動、いいかえると空間思考の質を深め、用いる範囲を広げる活動、を開発する教材研究

③ 小学・中学・高校段階で、一貫した見通しのもとでの学習活動の指導の開発

たとえば、上記の小学・中学・高校共通のテーマ設定の例に見るように、つながりと発展をもつ活動の指導の開発

(2) 発達の指標を基に、「空間思考を育成する視座」を、現段階において、明確にする。

(3) 「空間思考を育成する視座」から、現行の図形・空間カリキュラムを見直し、指導内容・位置づけ等の検討と上記教材開発・実践等のカリキュラムへの位置づけの検討

[引用・参考文献]

1. 狭間節子編著（2002）こうすれば空間図形の学習は変わる—小・中・高—算数・数学的活動を生かした空間思考の育成—, 明治図書（次頁の[資料]の引用は pp.38-43）

2. 中学校 空間思考を育成する教材開発と指導の全体構想

学年	目的	主 題	課題場面	空 間 思 考			
				A対象への接近	B空間像形成と操作	C表現	D空間的推論と拠り所
1 年	n次元図形の切り口としての(n-1)次元図形の連続的な変形を統合し、もとのn次元図形をイメージする(3≧n≧1)	「高次元からの眺め」 (☆1) 荊木 聡	ある図形を等間隔に切断した切り口を連続的に観察し、もとの図形のイメージをつくる	一連の切断面をパラパラマンガの手法で観察する	連続的な切断面ともとの立体との関連をつける	言語、見取図等による表現、 実物製作	1点が2点に分離する箇所や点の加速度に注視して、元の図形と矛盾がないか確認する
	2次元表現されたいくつかの図を立体的に構成する力を育成する	「回転体を捉えよ！」 (☆2)	一連の切断面群を統合して、もとの回転体をイメージせよ	透明アクリル板や発泡スチロールで立体を形づくる	多様な角度から観察し、情報を削ってイメージ化する触探索	イメージした像の製作及び回転面の形状の図示	イメージした像と実際に製作した模型との整合性を図る
	静的イメージを想起して垂直の定義を捉える 動的イメージを創出し位置関係の真偽を判断できる	「直線・平面の位置関係をイメージする」 (☆3) 荊木 聡	今、見ている鉛筆は机に対して垂直に立っているか	ミニチュア模型やシャボン膜を用いて考える	イメージした直線や平面が固定的か動的かを意識し検証する	言語・身振り手振りによる空間関係の表現	実物や模型を用いたディスカッション
	展開図と実物との関連をつける際に必要なイメージをつくる	「立体パズルの創造」 (☆4) 荊木 聡	展開図からポリキューブ片を作ろう。またポリキューブ片から展開図を作ろう	展開図の組み立て 立体の分割とその2次元表示	展開図を組み立てるイメージをもち、かつ各ポリキューブ片の形状を捉える	立体パズルのピースづくり パズルの解答(展開図)づくり	展開図上のピースごとの塗り分けと見取図上の各ピースの位置との関連づけ
	写真から3次元空間をイメージし、絵地図上の位置関係に変換する	「遊園地」 (☆5) 加波忠弘	遊園地の写真が絵地図上のどの位置から撮影したのかを調べよう	写真と絵地図の観察	写真⇄3次元空間⇄絵地図、をつなぐ空間像の操作	絵地図上の位置を決定し、その理由を説明する	空間における位置関係 遠近法
	切断に関わる素朴な見方・考え方を活用して、切断面をイメージする	「立体の切断面をイメージしよう」(☆6) 荊木 聡	立方体表面上の3点を通る平面で切断すると、切り口はどんな形だろう。	立方体型のようかん、ゼリー、容器を用いる	実物の切断や水面の形の観察から、予想図の正誤を確認する	切断面を見取図に表現	切断に関する3つの「通行手形」
3 年	3種の2次元図の情報を統合して、一つの空間像として捉える力をつける	「見えない迷路」 (☆7) 荊木 聡	立方体の透明迷路内のボールをスタートからゴールの位置まで移動させよう	実物に触れてボールの動きを確認する 実物には触れずに思考実験する	溝とボールの動きに慣れ、ボールの動きを論理的に捉えかつ動的にイメージする	立体の各階層ごとに見えない通路を図示する 実物で操作する	ボールが動くためには、3面のうちの2面で同じ方向の溝があることを押さえる
	複数視点からの島の写真をもとに、島の全体像、山の形状、位置関係をイメージし、粘土で立体模型を作る	「立体地図をつくろう」 (☆8) 坂本宏和	3枚の写真をもとに、島の立体模型を製作する	異なる視点からの写真をもとに島の全体像をイメージし、粘土を用いて製作する	2つの山の形状、位置関係、半島部の傾斜などを分析する 視点の統合	粘土による島の模型製作	平面図・立面図・側面図の活用
	立方体の切断面の形や全体像をイメージし、図を基に分析し、論理的に説明する	「立方体を切断しよう」 (☆9) 坂本宏和	いくつかの条件で立方体模型を切断し、多面体に変形する	具体物の切断から、見取図をもとにイメージによる切断へ	見取図をもとに、連続して切断して変形した立体を決定する	具体物の切断 見取図表現 言語表現	切断面と側面の交線と、切断面の形との関係 立方体の対称性

3. 高等学校 空間思考を育成する教材開発と指導の全体構想

学年	目的	主題	課題場面	空間思考			
				A対象への接近	B空間像形成と操作	C表現	D空間的推論と拠り所
1年	異なる位置に配置した部分絵が全体として1枚の絵に見えるための条件を求める	「階段アート」 (★5) 吉武 進	階段の複数の垂直面を用いて、大きな1枚の絵を描くにはどうすればよいか	空間的位置関係によって生じる見え方の違いを予想し、実験し、数学的処理にもちこむ	1枚の絵を、①単純に切り階段に貼る②プロジェクターで投影する、どう見えるかを予想し検証する	言語表現 側面図・平面図表現 数列・漸化式表現	各段における絵の大きさを数列と関係づけ、求める条件を漸化式で表し、一般項を求める
	問題づくりを通して、既知の知識と関連させて空間図形を分析する 平面図形を抽出し、それに帰着して考える	「三角比—正弦定理・余弦定理の活用—」 (★1) 田中正男	立体図形を選び、三角比を用いる問題をつくり、求めるものを変化させて異なるタイプの問題に変形する	立体図形から平面図形を抽出する 図、言語、記号表示を基に推論する	三角形に分割し、三角形の性質に帰着して分析する 総合して問題を作る 視点の変更	文章表現 図表現 三角比にまつわる数式表現	正弦定理、余弦定理、三角形の面積公式の活用
2年	鏡の虚像をイメージできるベクトルを用いて光の動きを説明する	「二面鏡のミステリー」 (★2) 吉武 進	二面鏡に自分を映すとき、どのように見えるか	自分と虚像の関係を、鏡や図を用いて考える	鏡の角度を変えると何がかわるか 鏡の中の鏡にはどのように映るか	言語表現 平面図・見取図表現 ベクトル表現	図形の合同 面(線)対称移動 ベクトルを用いて光の動きを説明する
	立体の切断面をイメージし、図や式で表現する 切断面から立体の全体像をイメージする 切断面の変化を捉える	「立体の切断面を表現する」 (★3) 田中正男	立体を座標軸に垂直に切断した切断面の形と形の変化を分析する 薄板でオブジェを作る設計図と完成図を描く	見取図から座標軸を設定する 立体の全体像をイメージする	切断面と全体像をつなぐ 切断面の式表現から変化の様子を捉える	見取図、投影図、断面図など 曲線の式表現、芸術的表現	空間座標、曲線の方程式 空間図形についての総合的知識
3年	・回転体をイメージし、側面の特徴をつかむ ・積分を用いて体積を計算する	「さいころ回転体」 (★4) 吉武 進	さいころの指定線分を軸として1回転するとどんな立体ができるか、その体積はいくらか	さいころの回転 回転体の側面・断面の図表現 断面の式表現	具体物の回転による残像から回転体の形および断面を同定する	見取図・断面図表現 曲線の式表現 パソコンによる表現	空間座標 投影図による各部分の関係 曲面と平面の交線の方程式
	人工および自然のかたちから構成要素をイメージする 構成要素から全体像をイメージする	「人工のかたちと自然のかたち」(自由研究) (★6) 田中正男	造形作品、建築物、絵本、影絵、地図、鳥瞰図、分子構造などと空間図形との関わりを考察し、レポートする	調査活動 造形作品製作などの表現活動	空間図形の性質に帰着させて分析し、それらを総合する	各種図表現 芸術的表現 文章表現・数式表現 討論	3次元の形に関する総合的な知識 考察のための低次元化の手法 イメージ操作と創造力

表の各欄の内容はそれぞれの指導者の構想であり、狭間がとりまとめた。

(狭間節子)