

# らくらく相対論入門 その3

## —擬ニュートンポテンシャルの応用—

福江 純・竹田 奈央・堀川 直樹

〈大阪教育大学 〒582-8582 柏原市旭ヶ丘 4-698-1〉

e-mail: fukue@cc.osaka-kyoiku.ac.jp

ブラックホール周辺の相対論的性質をうまく模倣する道具として、天文の業界では“擬ニュートンポテンシャル”が重宝されている。これを使えば高校生でも一般相対論的現象を手軽に計算できるだろう。今回、その応用例として、制限三体問題と、楕円軌道および遠日点移動について調べてみた。グッドニュース：ラグランジュの正三角形解はずれが生じ、近日点移動（遠日点移動）は起こるので、教育的側面での利用範囲は広がるだろう。バッドニュース：一般相対論の計算と比べ、遠日点移動の移動角度量は3割程度小さく、一般相対論を擬ニュートンポテンシャルで代用した数値シミュレーションは定量的には信頼性に欠けることがわかった。

### 1. 擬ニュートンポテンシャル

シュバルツシルト時空の一般相対論的効果のうち、力学的な性質をよく模倣するものとして、ニュートンポテンシャルを少し変形した擬ニュートンポテンシャル (pseudo-Newtonian potential) というものがパチンスキー (B. Paczynski) とウィータ (P. J. Wiita) によって提案され<sup>1)</sup>、とくにブラックホール降着円盤の業界で重宝されてきた<sup>2)</sup>。シュバルツシルト時空における最終安定円軌道 (ISCO) の半径を数値的に正しく再現し、したがって、相対論的エピサイクリック振動数なども近似的に表現できるため、一般相対論的性質を簡易的に表現するための非常に強力なツールである (時空は平坦なままなので、光線の曲がりなどの光学的性質は表現できない)。その特徴や限界については、10年ほど前に2回にわたり本誌で紹介したとおりだ<sup>3), 4)</sup>。

ブラックホールの質量を  $M$ 、シュバルツシルト半径を  $r_s (=2GM/c^2)$  とすると、擬ニュートンポテンシャルは、

$$\psi_{\text{PN}} = -\frac{GM}{r-r_s} \quad (1)$$

という式で表される ( $G$  は万有引力定数,  $c$  は光速)。ニュートンの重力ポテンシャルで、分母の半径  $r$  を、 $(r-r_s)$  で置き換えただけの単純なものだが、上記のように最終安定円軌道 ISCO の半径 ( $3r_s$ ) および限界束縛軌道の半径 ( $2r_s$ ) を定量的に正しく再現できる。

前回の報告でも紹介したように (参考文献3)、擬ニュートンポテンシャルは、適当にでっち上げたものではなく、シュバルツシルト時空での一般相対論的なポテンシャルの低次近似として導くことができるので、上記のような再現性は不思議なことではない。少し前に、アブラモウィッツ (M. A. Abramowicz) も擬ニュートンポテンシャルの導出を論文にまとめていたが<sup>5)</sup>、導出法はいろいろある (でも、マレクは何でも論文にしちゃう)。

ところで、擬ニュートンポテンシャルが提案された1980年前後は、ブラックホール周辺でのプラズマガストラス (polish doughnuts)\*1 の構造が熱心に研究されていた時期であり、パチンス

キーとウィータも一般相対論をフルに使わずにトラス内縁近傍の構造を調べるため、擬ニュートンポテンシャルを編み出した。もちろん相対論に熟知していたからこそその技だが\*2、逆に言えば、相対論に馴れていても、相対論的計算を行うのはやはり面倒なのだ。

擬ニュートンポテンシャルは、ISCOなどの半径を正しく再現するので、ブラックホール周辺の円運動に適用するのは妥当だろう。ただし、擬ニュートンポテンシャルを使うと、ブラックホール近傍では回転速度が光速を超えるので、場合によっては補正が必要である（参考文献4）。しかし、円軌道はよいとしても、楕円運動はどうだろう。少なくとも知る限り、擬ニュートンポテンシャルが楕円軌道で正しく振る舞うかどうかは検証されていないように思う。にもかかわらず、最近になっても、数値シミュレーションなどで擬ニュートンポテンシャルが“乱用”されているのは、多少、気になるどころだった。定量的な結果が最重要なはずの数値シミュレーションで、定量性が保証されていない擬ニュートンポテンシャルを使うのは、直感的にも怪しい感じがするわけだ。

ともあれ、今回は、擬ニュートンポテンシャルの応用として、制限三体問題（ロッシュポテンシャル・ラグランジュ点）と楕円軌道（近日点移動・遠日点移動）について調べたので、その結果を報告する。

以下、2章で制限三体問題について、3章で楕円軌道について述べる。4章で今後の課題などに触れる。

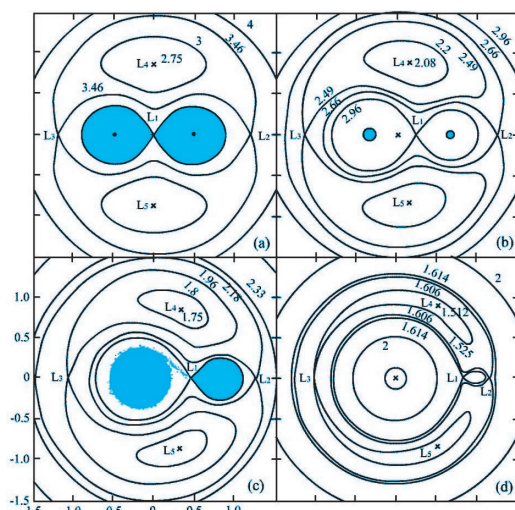


図1 連星のロッシュポテンシャル（軌道面内）。(a) 質量比1, (b) 質量比0.5, (c) 質量比0.23, (d) 質量比0.0123（地球-月系）。

## 2. 制限三体問題

ニュートンの万有引力に基づく天体力学の美しい応用例の一つが、連星系・制限三体問題におけるロッシュポテンシャルとラグランジュ点である（図1）。

三つの天体がお互いに重力を及ぼし合っている天体力学の問題が**三体問題**だが、第3体目の天体の質量がほかの2体に比べて十分小さく無視してよい場合が**制限三体問題**である。このとき、第3体目は、ほかの2体の重力場および公転に伴う遠心力が形作る有効ポテンシャル—**ロッシュポテンシャル**—の中で運動する。またポテンシャルの極値（力の均衡点）が5箇所あり、2天体を結ぶ直線上の3カ所  $L_1$   $L_2$   $L_3$  点は**ラグランジュの直線解**と呼ばれ、2天体を底辺とする正三角形の頂点2カ所

\*1 以前は、幾何学的に厚い降着円盤（thick accretion disk）とか、降着トラス（accreting torus）、円環星（toroidal star）などと呼んでいた。最近の論文ではアブラモウィッツはポーランド風ドーナツ（polish doughnuts）と呼んでいる。リース（M. J. Rees）が命名してほしい。でも今回はじめてググってみたら、実際のポーランド風ドーナツは饅頭形で穴が空いてないよ！

\*2 長らくそう思っていたが、アブラモウィッツ（2009；参考文献5）によると、パチンスキーは一般相対論が得意だったわけではないらしい。“out of nowhere”，何もないところから有を生み出すパチンスキーの類い希な才能が生み出したものだそうだ。

L<sub>4</sub> L<sub>5</sub>点はラグランジュの正三角形解と呼ばれる。

2天体の質量比がどのような値を取ろうとも、常に正三角形解が成り立つところが、ニュートン力学の妙技である。たとえば、太陽-木星系においては、トロヤ群・ギリシャ群などの小惑星が、ほぼ木星軌道上で正三角形解の位置に分布している。また地球-月系では、『機動戦士ガンダム』で、ラグランジュ点はスペースコロニーのサイドとして有名になっただろう。さらに、太陽-地球系では、太陽側のL<sub>1</sub>点に太陽観測衛星SOHOが置かれ、太陽と反対側で地球の影になるL<sub>2</sub>点にWMAP衛星、プランク衛星、ハーシェル宇宙望遠鏡、ガイア衛星など多数の宇宙観測衛星が置かれ、L<sub>5</sub>点にはスピッツァー赤外線宇宙望遠鏡が設置されている。

では、ブラックホール連星の場合、すなわち一般相対論的な効果が入った場合に、ロッシュポテンシャルやラグランジュ点はどうなるだろうか、というのが最初の問題である。

もっとも、一般相対論におけるアインシュタイン方程式は非線形なので、重力ポテンシャルと遠心力ポテンシャルを足し合わせて構成できるロッシュポテンシャルのような解析的な数式で表すわけにはいかないだろう。実際、少し確認した範囲では、近似解は調べられているようだが、厳密解はまだ見いだされていないようだ（そもそも解析的な厳密解は存在しないだろう）。最近のものと、参考文献6では光速に比べて十分小さい近似での解が詳細に調べられている。

そこで、擬ニュートンポテンシャルを用いて、ロッシュポテンシャルとラグランジュ点の様子を調べてみた。

さて、ロッシュポテンシャルを構成するためには、天体1の重力ポテンシャルと天体2の重力ポテンシャル、そして公転運動に伴う遠心力ポテンシャルが必要である。このうち、重力ポテンシャルは、それぞれの天体の擬ニュートンポテンシャルで置き換えればよいが、問題は遠心力ポテン

シャルの角速度である。もともと力学的釣り合いの形にできないので、角速度をきちんと決めることは難しいのだが、天体1（天体2）の釣り合いには天体1（天体2）の重力場を当てることで角速度を決定した。

以上のような近似のもとで、擬ロッシュポテンシャルの式は以下になる。

$$\Psi_{\text{PN}} = -\frac{GM_1}{r_1 - r_{s1}} - \frac{GM_2}{r_2 - r_{s2}} - \frac{1}{2} \frac{G(M_1 + M_2)}{[(a_1 - r_{s1})^2 + (a_2 - r_{s2})^2]a} r^2 \quad (2)$$

記号の細かい意味は教科書<sup>7)</sup>などを見て欲しいが、シュバルツシルト半径を0に置けば、通常のロッシュポテンシャルの式に帰着する。

長さを天体間の距離 $a$ を単位として無次元化すると、質量比を $f (=M_2/M_1)$ として、無次元化した擬ロッシュポテンシャルは以下になる。

$$\Phi_{\text{PN}} = -\frac{1}{r_1 - r_{s1}} - \frac{f}{r_2 - r_{s2}} - \frac{1}{2} \frac{1+f}{\left[ \left( \frac{1}{1+f} - r_{s1} \right)^2 + \left( \frac{f}{1+f} - r_{s2} \right)^2 \right]} r^2 \quad (3)$$

パラメータは、質量比 $f$ と天体1の無次元化したシュバルツシルト半径 $r_{s1}$ （天体1のシュバルツシルト半径と天体間距離の比）である（天体2の無次元化したシュバルツシルト半径 $r_{s2}$ は $r_{s1}$ の $f$ 倍になるので自動的に決まる）。

上記の設定のもとで計算した擬ロッシュポテンシャルを図2に示す。質量比はどれも0.5で、無次元化したシュバルツシルト半径 $r_{s1}$ が、順に0（ニュートン力学の場合）、0.007、0.07、0.2、0.7となっている。

図2を見わかるように、相対論的效果が強くなると、それぞれの天体周囲の重力ポテンシャルは等ポテンシャル線が大きくなり、ポテンシャルは

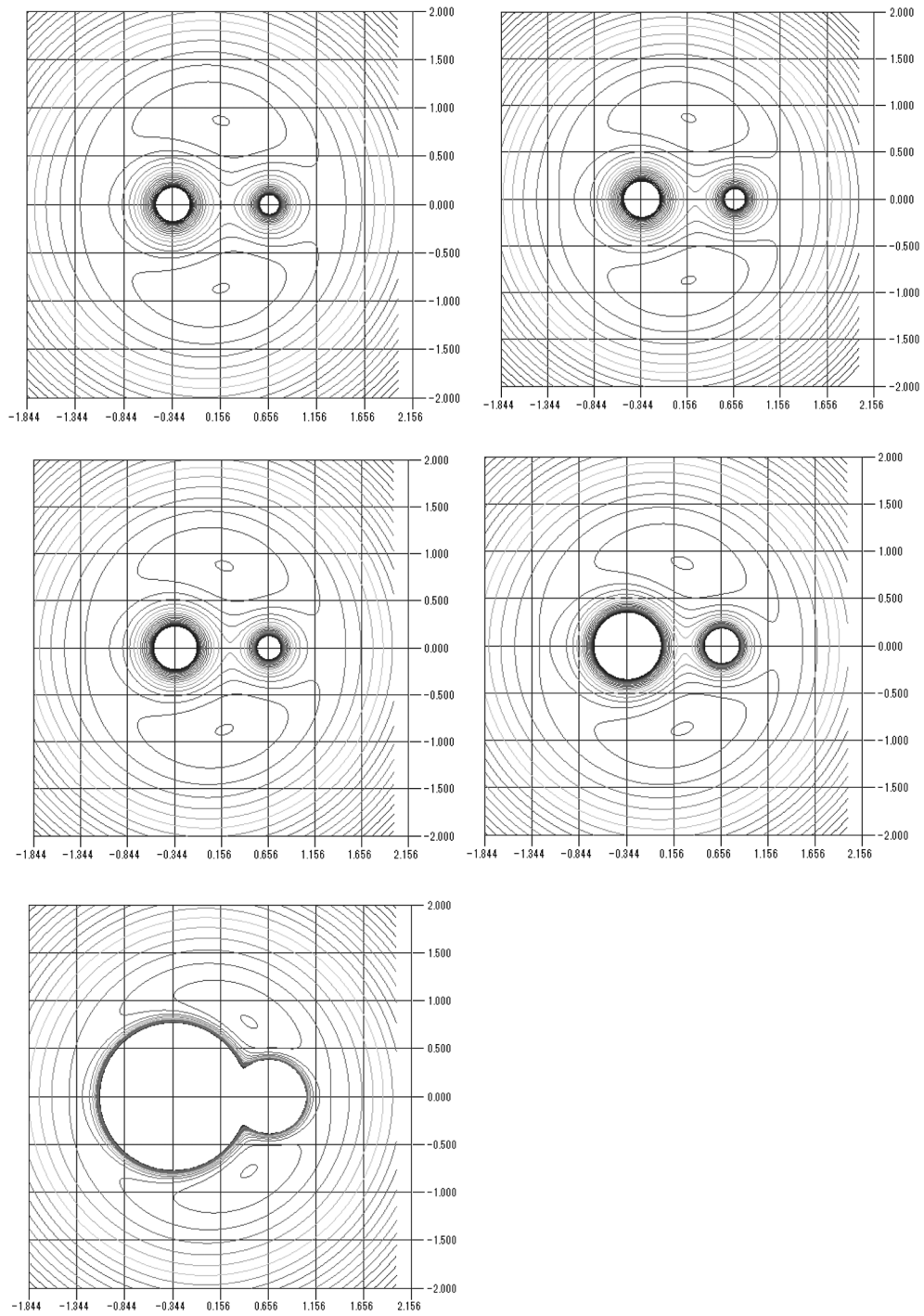


図2 擬ロツシュポテンシャルの例. 質量比は0.5. 無次元化したシュバルツシルト半径 $r_{S1}$ の値が, 左上から, 0, 0.007, 0.07, 0.2, 0.7. ポテンシャルの形状変化やラグランジュ点のずれが見て取れる.



深く強くなる。またぱっと見にはわかりにくい  
が、周辺部で優勢となる遠心力ポテンシャルもや  
や深くなっている。ニュートンポテンシャルに比  
べて擬ニュートンポテンシャルが深いこと、およ  
び重力が強くなるために公転角速度も大きくなり  
遠心力ポテンシャルも深くなることから、これら  
の傾向は説明できる。

力の均衡点であるラグランジュ点の位置だが、  
図2から、ラグランジュの正三角形解は崩れてい  
くことが見て取れる。具体的には、 $L_4$ 、 $L_5$ の位置  
は、 $x$ 軸の正方向へ少しずつ大きくなるとともに、  
 $y$ 軸方向へは少しずつ小さくなっている。この傾  
向は、定性的には参考文献6の近似解と同じであ  
る。また直線解については、 $L_1$ 点はやはり $x$ 軸の  
正方向へずれていくことが見て取れる。

### 3. 近日点（遠日点）移動

最初にも述べたように、擬ニュートンポテン  
シャルは円運動に関するいろいろな半径について  
は、数値的にも正しい値を出してくれる。しか  
し、円運動の軌道速度の値自体は、一般相対論の  
値とは定量的には異なり、半径が小さいほど差は  
大きくなっていく。一方、楕円運動でどれぐら  
いの違いが出てくるかの比較研究は見たことがな  
い。今回はわかりやすい例として、近日点の移動  
を比べてみた。

ニュートンの万有引力のもとでは、中心天体の  
まわりで重力的に束縛された運動は、一般に閉じ  
た楕円軌道を描く。太陽系の惑星軌道や周期彗星  
の軌道などがそうである。しかし、太陽に最も近  
い水星の軌道は、完全に閉じた楕円軌道ではな  
く、少しずつずれていき、その結果、軌道上で太  
陽に最も近い場所である近日点もずれていくこ  
が知られていた。この近日点移動がアインシュタ  
インの一般相対論で証明されたのは有名な話だろ  
う。

今回は、シュバルツシルト時空で計算した粒子  
の軌道運動と、擬ニュートンポテンシャルを用い

て計算した粒子の軌道運動を比べて、近日点（近  
ブラックホール点）の移動量がどれくらい異なる  
かを比較した。

図3に計算例を示す。図3では、初期半径が  
シュバルツシルト半径の10倍の位置で、初期半  
径における円運動速度の0.9倍の回転速度を与え  
て計算した場合の例である（初期半径での動径速  
度は0）。これらの軌道図を比較すると、擬  
ニュートンポテンシャルでも近日点の移動が起こ

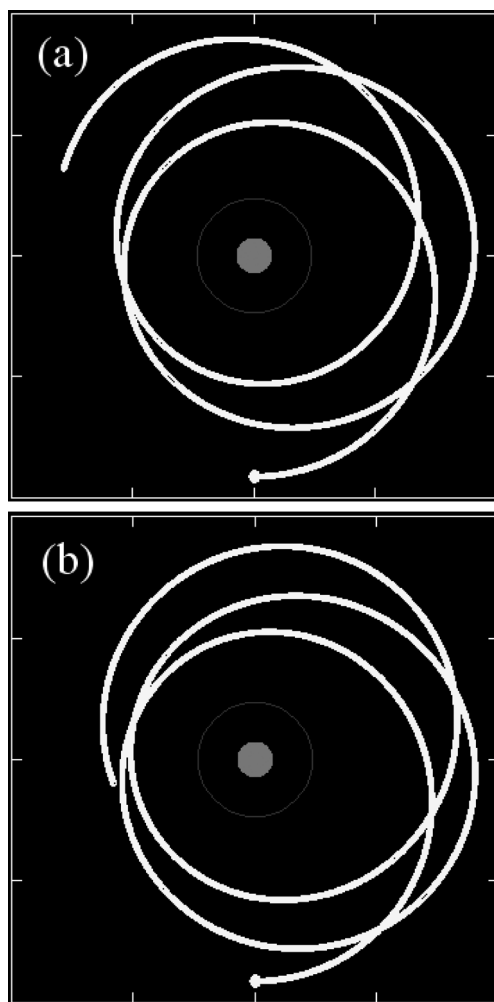


図3 近日点（遠日点）移動の計算例：(a) 一般相対  
論、(b) 擬ニュートンポテンシャル。初期半径  
がシュバルツシルト半径の10倍で、初期半径  
での円軌道速度の0.9倍の回転速度を与えた場  
合。

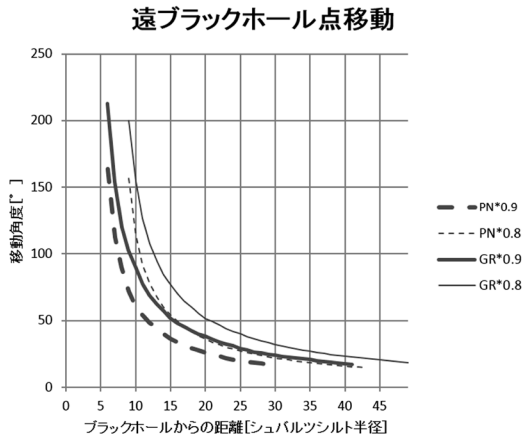


図4 遠ブラックホール点の移動量. 横軸はシュバルツシルト半径を単位とした初期半径, 縦軸は1周あたりの移動角度量. 実線が一般相対論の結果で破線が擬ニュートンポテンシャルの場合. また太線は初期半径での円軌道速度の0.9倍, 細線は0.8倍の回転速度を与えた場合.

ること, また移動の方向は“順方向”で一般相対論の場合と同じことがわかる. したがって, 定性的には擬ニュートンポテンシャルで近日点の移動を表現できる. 一方で, 図からも軌道の軌跡が少し違うことが見て取れるように, 定量的には軌道が異なってしまうことがわかるだろう.

このような軌道計算をもとに, ブラックホールの周りを1周する間に楕円軌道の軸が何度移動するかを調べた. なお, 実際には近日点付近は軌道が混み合って調べにくいので, 遠日点(遠ブラックホール点)の移動量を比べた. また精度を高めるために, 何周か周回させた後に, 1周あたりの移動角を計算した. 得られた結果を図4と図5に示す.

図4の横軸はシュバルツシルト半径を単位とした初期半径で, 縦軸は1周回ごとの遠ブラックホール点の移動量(角度)である. 実線が一般相対論の計算結果で, 破線が擬ニュートンポテンシャルでの計算結果. また太線は初期半径での円軌道速度の0.9倍の回転速度を与えた場合で, 細線は0.8倍の場合.

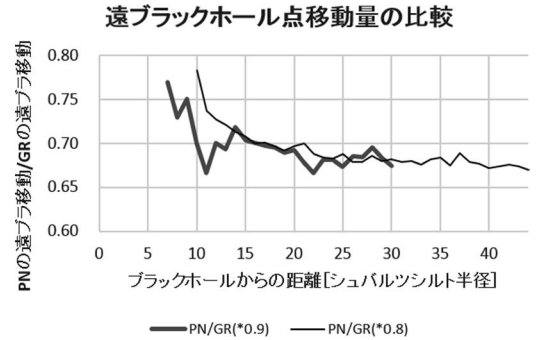


図5 遠ブラックホール点の移動量の比較. 横軸はシュバルツシルト半径を単位とした初期半径, 縦軸は擬ニュートンポテンシャルでの移動量を一般相対論での移動量で割った値. また太線は初期半径での円軌道速度の0.9倍, 細線は0.8倍の回転速度を与えた場合.

図4から見て取れるように, 初期半径が小さいほど遠ブラックホール点の移動量が多いこと, 初期半径における回転速度が小さいほど移動量が大きくなることは, シュバルツシルト時空での計算でも擬ニュートンポテンシャルを用いた計算でも, 定性的には同じである. ただし, 定量的には, 値はかなりずれがあり, 擬ニュートンポテンシャルによる計算値のほうがシュバルツシルト時空での値より小さ目になっている.

遠ブラックホール点の移動量を比較するために, 縦軸をシュバルツシルト時空の値で規格化したものが図5である. この計算範囲では, 擬ニュートンポテンシャルによる計算値がシュバルツシルト時空での値の7割前後で(すなわち3割ぐらい小さい), 中心に近いほど少しずつ大きくなること, 初期半径で与えた円軌道速度にはあまり依存しないらしいことがわかる.

ここで問題とすべきなのは, 最終安定円軌道ISCO近傍ならともかく, シュバルツシルト半径の数十倍の場所でも3割ほど違うという点である.

冒頭にも書いたように, しばしばブラックホール降着流の数値シミュレーションでは, 一般相対論的效果をとりあえず模倣するために, 擬ニュー

トンポテンシャルを使うことがある。このような数値シミュレーションでのシミュレートされたガス塊は、すべての方向の速度成分をもち、さまざまな楕円運動や極運動を行っている。擬ニュートンポテンシャルにおける円運動の回転速度の値が、一般相対論の値と大きく違ってくるのはシュバルツシルト半径の数倍くらいからだが、今回の結果から、ガス塊の運動方向についてはシュバルツシルト半径の数十倍の場所でさえ何割もの差が生まれることが推測される。超臨界降着流のシミュレーションや、ガンマ線バーストのシミュレーションでは、シュバルツシルト半径の数十倍の領域が数値シミュレーションのコア領域であることも多いだろうが、その領域で、擬ニュートンポテンシャルは3割の誤差を含む可能性があるのだ。本当に3割もの誤差があれば、数値シミュレーションの結果自体が信用できないことになりかねない。

実際には、いろいろな方向の運動で誤差が相殺したり、平均量を取ることで均一化したりするだろうが、本質的な解決にはなっていないだろう。

#### 4. 今後のチャレンジ課題

最後に、今後の課題について、教育面と研究面にわけて、少し検討しておきたい。

教育面：

擬ニュートンポテンシャルを使えば、一般相対論における近日点の移動などが簡単に表現できるので、教育的な利用範囲は大きく広がるだろう。たとえば、擬ニュートンポテンシャルを用いた擬ロッシュポテンシャルを使えば、ブラックホール連星周辺での粒子の運動などを定性的には模擬的にシミュレートできるだろう。

単体の星への応用も考えられる。白色矮星ぐらいたと相対論の効果は無視できるが、中性子星になると相対論的效果が働いてくる。そこで、擬ニュートンポテンシャルを用いて、中性子星の大気構造を調べてみるのも面白いかもしれない。

少し難易度が高いものとしては、一般相対論的な効果を入れた回転星の大気構造や、さらには降着トーラスの構造にチャレンジすることも可能だ。擬ニュートンポテンシャルを使えば、パチンスキーとウィータの研究を再現することもできる。ニュートン力学では角運動量の障壁によって、中心天体へガスが落ちることは不可能だが、擬ニュートンポテンシャル（一般相対論）では、ポテンシャルに鞍部が生じてガスの降着が可能になることを見出すことができるだろう。

研究面：

最近の研究論文でもしばしば目にする擬ニュートンポテンシャルだが、その利点と欠点には十分に注意しないとイケないだろう。一般相対論の計算と擬ニュートンポテンシャルを使った計算の差異について、定性的定量的に、さらなる検証が必要である。

楕円運動などガス塊の運動はもちろん、ガス塊がぶつかりあって生じる衝撃波の再現性なども確認する必要があると思う。加熱や冷却プロセスにおける、一般相対論と擬ニュートンポテンシャルの差異も比較検討する必要があるだろう。衝撃波や加熱・冷却は局所的な物理なので、一見、時空構造と無関係に思えるが、運動速度などを通じて時空構造と結びついている。

参考文献4（とその引用文献）で紹介したように、円軌道などは擬ニュートンポテンシャルと一般相対論では定量的には違うが、擬ニュートンポテンシャルの速度に“相対論的”補正を施すことで、定量的にもほぼ一致させることが可能になる。音速についても、“相対論的”補正を施すことで、一般相対論の値に近づけられる。楕円軌道の場合でも、速度や音速へ“相対論的”補正を施すことで、精度を劇的に上げることが可能かもしれない。これらについても、きちんと比較研究する価値があるかと思う。

## 参考文献

- 1) Paczynski B., Wiita P.J., 1980, A&A 88, 23
- 2) Kato S., Fukue J., Mineshige S., 2008, Black-Hole Accretion Disks (Kyoto Univ. Press)
- 3) 福江純, 2005, 天文月報98, 75
- 4) 福江純, 2005, 天文月報98, 169
- 5) Abramowicz M. A., 2009, A&A 500, 213
- 6) Abd El-Bar S. E., Abd El-Salam F. A., 2012, American J. Applied Sci. 9, 659
- 7) 福江・沢編『超・宇宙を解く』恒星社厚生閣

## Easy Relativity 3: Application of the Paczynski–Wiita Pseudo-Newtonian Potential

**Jun FUKUE, Nao TAKEDA and Naoki HORIKAWA**

*Astronomical Institute, Osaka Kyoiku University,  
4-698-1 Asahigaoka, Kashiwara, Osaka  
582-8582, Japan*

**Abstract:** The Paczynski–Wiita’s pseudo-Newtonian potential is widely used as a powerful tool to mimic the general relativistic effect around a Schwarzschild black hole in the research field of black-hole accretion disks. As applications of this potential, we examine the behavior of the Roche potential and Lagrangian points as well as elliptic orbits and peri-blackticon shift. **GOOD NEWS:** Lagrangian points deviate from the Newtonian case, and peri-blackticon (apo-blackticon) shifts take place in a qualitatively similar manner with the general relativistic case. Hence, the usage of the pseudo-Newtonian potential for the educational scene may extend. **BAD NEWS:** Quantitatively, the pseudo-Newtonian potential gives the values of 30% lower than the correct ones under general relativity. Hence, the usage of the pseudo-Newtonian potential in numerical simulations around black holes is quite dangerous.