物理教育の公理化と非線形性

物理学教室　鯖　田　秀　樹

(1974年2月20日受理)

I　はじめに

数学はわかるが物理学はわからないという声を初学者から聞くことがある。数学は論理的な学問であるから，公理にはじまり定義，定理，系と演繹的に記述され統一がとれている。それで，数学を理解するには論理的思考に頼り，一歩一歩着実に進めばよい。

一方，物理学は自然を対象とする経験科学であり，観測，実験を通じて自然から得た事実を法則の形にして論理的体系らしいものにまとめて記述されるので，統一がとれていない。それで，物理学を理解するには論理的思考に頼るだけでなく，実験等の経験から得た感覚的なものが必要となる。

古典的物理学は現在の形になってからかなりの年代を経ており，旧態依然としたばらばらな統一のとれていない記述を墨守することの必要性もうすくなってきている。

特に初等物理学では等閑視されている非線形性を最初からとり上げると現在よりもはるかに演繹的に記述できることがわかる。公理から出発して演繹的に記述できる部分があれば，そのように改めてみることも学問としては必要であろう。

この論文では，そのような公理化の試みの途中の一里程として，波動現象，振動現象，放物体運動を統一的に扱ってみる。非線形性という一本の線で三つの現象をつないでみることを試みる。

波動方程式から出発して振動の方程式を経由して放物体の運動方程式に至る非線形性を考慮しての統一的とり扱いを行う。図示すれば，

$\boxed{\text{波動方税式}}$ ⟶ $\boxed{\text{振動の方程式}}$ ⟶ $\boxed{\text{放物体の運動方程式}}$

となる。

II　物理教育の公理化

20世紀前半の最も偉大な数学者で当時の世界の指導者であった数学者D・ヒルベルトは今世紀の初頭，20世紀の数学の目標として20余りの問題をかかげた[1)]。ヒルベルトの数学の問題の多くはすでに解決ずみであり，そのなかには日本の数学者による解決も2，3見られる。

ヒルベルト問題の第6番目にかかげられているものとして，

6）物理学の各部門の公理的扱い

がある。

このような問題提起は数学としてなら解決が得られる性質のものかも知れないが，自然科学である物理学としては学問の終焉の日まで完全には解決が見られない問題ではなかろうか。

物理学はより基本的な法則を求めて発展してきている。公理に対応するものはその部門の研究の最終段階で見出される性質のものである。物理学者はまだ完結していない部門の研究に従事するのが普通である。

それではこの公理化の試みは現代物理学に何をもたらすものだろうか。場の理論の公理化，統計力学の公理化はそれらの部門での一つの研究方法を提供している。

統計力学の基礎づけを例にとると，エルゴード性の吟味が公理化へつながるわけだが，その吟味としての計算機実験の結果はこの学問のもつ非稠密性をあばいた。そして，公理化を行う以前に研究しなければならないことがいかに多いかを示し，ソリトンという新しい自然現象の研究への道を切り開いた。

このようにして，まだ未完成の現代物理学の公理化を目指すことは，当初の目的とは異なる副次的産物である新しい現象の発見をもたらし，その部門がより深遠になり，より充実することになる。そのような公理化を試みることは，公理論的構成を行うことをより困難にするが，その部門の研究を推し進める役割を果し得る。その部門がいかに非稠密な理論構成になっているかを思い知らせ，研究の深化を促す動機となる。しかし，このことはヒルベルトの考えた公理化にはならない。公理論的構成への道がかえって遠のくことになる。その意味でヒルベルトの考えた公理化はすでに出来上っていると見なされている古典物理学について行うべきである。そのうちでも物理教育の教材になっている部分は現代物理学との交流も少ないので，再編成して公理論的に構成し直し得る可能性がある。

もちろん，自然科学の教育を行うのに，全面的に公理論的にやるのは問題がある。しかし，実験を行うのに，単なるテクニックの修得だけが要求される部分があるように，物理学の理論を理解するのに，論理的なものだけの修得の部分があってもよいではないか。また，実際的な教育とは別に，論理的体系を作っておくことは，物理学を別の角度から眺めるためにも必要と思われる。

ここで取り扱う波動現象は時間の反転によっても不変な現象であるから，熱学には無関係であるが，他の部門では最重要の現象である。振動現象もまた多くの部門でとり扱われるものであり，その特別な場合として力学に現われる放物体運動を含めることを試みよう。そのときに，非線形性がどうしても必要になる。非線形性を考えない場合には，振動現象と放物体運動は何の関係もない。

波動現象を何から導くかはつぎの問題であるが，ここではそれ以上は考えない。公理化の試みとしては，当然公理を定めてからでなければ理論構成を行えないわけだが，波動方程式に至るまでの理論は一切省略する。ある公理，定理から波動方程式が導かれるとし，それ以後を演繹的に展開する。

量子力学ではシュレディンガーの波動方程式が最初に現われ原子の世界の記述に中心的役割を果している。古典物理学においても波動方程式をはじめの方に置いて，巨視的現象を記述するための最重要の方程式にすることは現代風といえる。そうすれば，古典と現代の二つの物理学が一つの物理学にまとめられる可能性がでてくる。

数学教育の現代化が進められている昨今，物理教育の現代化を考えることも意味がある。

Ⅲ　波動と振動

波動と振動との間にはいろいろな関係がある。波動現象を局所的に見れば振動であり，振動現象を外部へ伝播させると波動となる。このことはグラフからも容易に想像され，正弦波と直線の交点の運動が単振動を行うことはすぐにわかる。

ここでは，数式の変形の結果として，波動方程式から単振動および非線形振動が導かれる場合を考える。

（A）線形方程式

$$\varphi_{xx}-\varphi_{tt}+\alpha\varphi=0 \qquad (1)$$

なる線形波動方程式から出発する。αは定数で，xは空間変数，tは時間変数である。下の添字はその変数についての微分である。

$$x-ct=s$$

とおき，

$$\varphi(x,t)=u(s) \qquad (2)$$

なる形の波にのみ着目する。これは位相速度cで伝播する定常波を考えることに対応している。そうすると簡単な計算で(1)は,

$$(1-c^2)u_{ss}+\alpha u=0 \tag{3}$$

と変形される。

$$\frac{\alpha}{1-c^2}=\omega^2 \tag{4}$$

と書ける場合を考えることにすると(3)は

$$u_{ss}+\omega^2 u=0 \tag{5}$$

となる。(5)は単振動の方程式である。

（B）非線形波動方程式

$$\varphi_{xx}-\varphi_{tt}+\alpha\varphi+\beta\varphi^3=0 \tag{6}$$

なる非線形波動方程式から出発する。(A)の場合と同様にして，$u(s)$の従う方程式をつくると,

$$(1-c^2)u_{ss}+\alpha u+\beta u^3=0 \tag{7}$$

が得られる。

$$\frac{\alpha}{1-c^2}=\mathrm{a}\ ,\ \frac{\beta}{1-c^2}=\mathrm{b} \tag{8}$$

とすると(7)は

$$u_{ss}+\mathrm{a}u+\mathrm{b}u^3=0 \tag{9}$$

なる非線形振動の方程式に変形される[2)]。

Ⅳ　振動と放物体(1)

（A）単振動

(5)で独立変数sを時間をあらわす変数と読み直しtと考える。tによる微分をドットで表わし,

$$\omega^2=\frac{kg}{m} \tag{10}$$

とすると，(5)は

$$m\ddot{u}+kgu=0 \tag{5'}$$

と変形される。

$$v=\frac{m}{k}\,\frac{\dot{u}}{u} \tag{11}$$

なるリッカチ変換を行うと

$$m\dot{v}+mg+kv^2=0 \tag{12}$$

なる従属変数vについての1階非線形常微分方程式が得られる。(12)はvを速度と考えた場合，質量mの放物体が速度の自乗に比例する抵抗を受けながら上昇して行く場合の運動方程式である。

（B）非線形振動

(A)の場合と同じようにして，(9)を普通の振動の方程式に書き直す。

$$\ddot{u}+\mathrm{a}u+\mathrm{b}u^3=0\,. \tag{9'}$$

この方程式の解はヤコビの楕円関数を用いると厳密に表わされる[3)]。

積分定数に特定の値をえらぶと，初等関数で表わされる場合があり，その解を(6)の波動解にもどして考えるとソリトン（孤立波）に対応していることがわかる。

(9′)の第1積分を求め，積分定数を適当にえらぶと

$$\dot{u}^2+\frac{\mathrm{b}}{2}\left(u^2+\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}}\right)^2=0 \tag{13}$$

が得られる。

これが放物体の方程式を表わしていることを示すために，

$$a=\frac{2kg}{m} \quad , \quad b=-\frac{2k^2}{m^2} \tag{14}$$

とし，uを速度を表わすvと書きかえると，

$$\dot{v}^2=\left(g-\frac{k}{m}v^2\right)^2 \tag{15}$$

が得られる。平方根をとると，

$$m\dot{v}=mg-kv^2 \tag{16}$$

$$m\dot{v}=-mg+kv^2 \tag{17}$$

なる二つの方程式が得られるが，vの符号の取り方のちがいを除けば，(16)，(17)はともに質量mの質点が速度の自乗に比例する抵抗を受けながら落下する場合の運動方程式である。

符号の統一のために，速度vを上向きを正とすれば，上昇する場合は，

$$m\dot{v}+mg+kv^2=0 \tag{12}$$

降下する場合は

$$m\dot{v}+mg-kv^2=0 \tag{18}$$

と並記できる。

(12)，(18)で空気の抵抗を考えないで$k\to 0$とすると，

$$m\dot{v}+mg=0 \tag{19}$$

となり，これは初等物理の最初に考える真空中の放物体の運動方程式である。

V　振動と放物体 (2)

以上述べた波動から振動を通っての放物体に至る論理の道筋は逆にはたどれない。数学的表現を用いれば，この三つの現象は同値ではない。つまり，波動のある特殊な場合として振動が導出され，振動にある特殊な条件を付加して放物体の運動が導出されたのである。

S_1：波動方程式の解の集合

S_2：振動方程式の解の集合

S_3：放物体の方程式の解の集合

と表記すると，集合の記号を用いて

$$S_1 \supset S_2 \supset S_3 \tag{20}$$

と数学的に表記される。つまり，S_2はS_1の真部分集合であり，S_3はS_2の真部分集合である。

この事情を具体的に説明するために，少し一般化して，減衰振動と速度に比例する抵抗の項も加えた放物体運動との間の関係を論じよう[4]。

放物体が上昇して行くとき(12)の拡張として，この場合は

$$m\dot{v}+\mu v+kv^2+mg=0 \tag{21}$$

となる。(11)の変換を使うと，

$$\ddot{u}+\frac{\mu}{m}\dot{u}+\frac{kg}{m}u=0$$

となり，$2\beta=\dfrac{\mu}{m}$とおき，(10)を用いると，

$$\ddot{u}+2\beta\dot{u}+\omega^2u=0 \tag{22}$$

に帰着される。(22)は減衰振動の方程式であり，$\beta<\omega$，$\beta>\omega$，$\beta=\omega$で解の形が異なる。

(1)　$\beta<\omega$　減衰振動

(2)　$\beta>\omega$　過減衰

(3) $\beta=\omega$ 限界減衰

(2)の過減衰の場合，初期データにより，解の形がいろいろの場合に分れるので興味がある。この場合について考えよう。

(22)の一般解はA，Bを初期データによってきまる定数とし，

$$\beta_1=\beta-\sqrt{\beta^2-\omega^2}\ ,\ \beta_2=\beta+\sqrt{\beta^2-\omega^2} \tag{23}$$

とおくと，

$$u(t)=Ae^{-\beta_1 t}+Be^{-\beta_2 t} \tag{24}$$

となる。A，Bの値で分類すると，

(a) $A>0$，$B>0$

(b) $A>0$，$B<0$，$|A|>|B|$

(c) $A>0$，$B<0$，$|A|<|B|$

(d) $A<0$，$B>0$，$|A|>|B|$

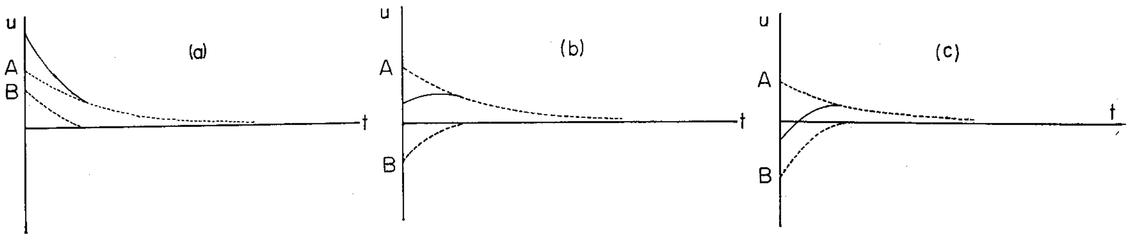
(e) $A<0$，$B>0$，$|A|<|B|$

(f) $A<0$，$B<0$

(a)，(b)，(c)をグラフに書くと図のようになり，

(d)＝－(b)，(e)＝－(c)，(f)＝－(a)

の関係がある。



この事実が放物体運動にどう反映されるか考える。今，考えているのは上昇して行く場合であるから，$t=0$でのvの値が正の場合しか意味をなさない。このことは条件式

$$(A+B)(A\beta_1+B\beta_2)<0 \tag{25}$$

となる。よって，(b)，(c)，(d)，(e)の場合だけが採用される。(a)，(f)の二つの場合には対応する放物体運動は存在しない。

Ⅵ　お わ り に

公理化という大きなプログラムのごく小部分について考察した。量子力学と同じように古典物理学においても波動方程式を中心にする物理学の記述ができるのではないかを試みてみた。その時どうしても非線形性が必要になった。古典物理学で非線形性を考えると量子論に似たものが得られるのは興味がある。ソリトンが素粒子に似た性質を示すこともその一例であり，プランク分布を非調和格子の場合に出現させる試みもある。ここでの試みはもっと広い範囲の物理現象に拡張できる可能性がある。おわりに，原稿作成に御助力された指導学生の泉和子，石崎晴子，清家芳光の諸君に感謝します。

参 考 文 献

1) 日本数学会編：岩波数学辞典　昭和43年

2) 鯖田秀樹：第21回応用物理学関係連合講演会予稿集（1974年4月）

3) 戸田盛和：振動論　培風館　昭和43年

4) 湯川秀樹，田村松平：物理学通論（上）　大明堂　昭和30年