

## 常用対数の近似値の考察

数学科 落合 毅

## 【要 旨】

2020年度の大阪教育大学池田地区附属学校研究発表会での公開授業の報告である。研究テーマは「社会とつながり、明日を切り拓く資質・能力の育成～探究のプロセスの構築～」である。高校では、さらに、2020年度「一人ひとりの学びを深める」という独自のテーマを掲げており、この点を意識して探究活動を実践した。

キーワード：常用対数 無理数 有理数近似 2進法的小数表示

## 1. はじめに

身近に起こる自然現象、社会現象の多くは指数・対数が大きく関係しており、教科書にも実生活における事例が取り上げられている。その際、常用対数の値は既知のものとして与えられているが、対数はその定義自身が加減乗除を超えたより高度な数学的概念を用いてなされるものであるため、常用対数の値がどのようにして導かれたのか、たいへん興味深い。

本時では、対数の性質を利用した2進法的小数表示による方法で、 $\log_{10} 2$ の値がどこまで近似できるのか考察させた。対数という高度な概念を簡単な四則演算で計算することが目標である。また、3進法による近似はどうかなど、本時の学習内容を超えて生徒の興味・関心が高まっていくことを期待して、常用対数を題材とした探究活動を実践した。以下に本時の活動を含めた常用対数の授業概要を記す。

## 2. 授業の概要

- (1) 日時 2020年11月上旬  
(本時は11月12日(木))
- (2) 場所 本校 2年1組教室
- (3) 対象 2年1組(41名)

## (4) 本時の学習

## (ア) 学習内容

- ・不等式を用いて無理数を近似する。
- ・下記の計算を繰り返し、 $\log_{10} 2$ を2進法で小数表示する。

$$\begin{aligned}\log_{10} 2 &= \frac{1}{2^2} \log_{10} 16 \\ &= \frac{1}{2^2} \log_{10} (10 \times 1.6) \\ &= \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} \log_{10} 1.6 = \dots\dots\end{aligned}$$

- ・ $\log_{10} 2$ の値を小数第4位まで求めるにはどこまでの計算が必要か考察する。

## (イ) 目標

対数の性質を利用して簡単な四則演算だけで常用対数の近似値が求まることを理解し、体験させる。

## (ウ) 準備物 プリント1枚、電卓

## (5) 指導計画(全5時間)

- 第1時：対数の導入、桁数と最高位の数字
- 第2時：常用対数を用いた作問
- 第3時：日常生活と対数
- 第4時：常用対数の近似値の考察(本時)
- 第5時：本時の振り返りとその他の考察

### 3. 本時の流れ

#### 【導入】

生徒の数的感覚を確認するために、いくつか質問をした。まずは、そもそも、 $\log_{10} 2$  は有理数なのか無理数なのか問うてみた。常用対数表には  $\log_{10} 2 = 0.3010$  と記載されており、有理数と考える生徒がいても不思議ではないが、無理数と考えている生徒が圧倒的に多かった。対数の定義と指数法則に従うと

$$\log_{10} 2 = \frac{n}{m} \quad \text{すなわち} \quad 2^m = 10^n$$

が成り立てばよいが、この等式を満たす自然数  $m, n$  は存在しない。なんとなく無理数と考えていた生徒も、これには深くうなずいて納得していた。

ところで、等式を満たす自然数は存在しないが、この等式は大きな役割を果たしてくれる。次に、この等式をおおよそ満たす自然数  $m, n$  はどんなものか問うてみた。非常に曖昧な質問であるが、 $(m, n) = (3, 1), (10, 3)$  といった感じの答えが返ってきた。これには少し驚いた。生徒の数的感覚もなかなかのものである。こうして導かれた不等式  $\frac{3}{10} < \log_{10} 2 < \frac{1}{3}$  によって、 $\log_{10} 2$  の小数第 1 位が決定する。無理数を有理数で近似していく、生徒にとっては初めての体験かもしれない。次に、小数第 2 位を決定するためには、先程より精度の良い不等式を導かなければならない。すなわち、先程より限りなく等式に近い自然数  $m, n$  を見つける必要があるが、容易ではない。小数第 4 位まで決定するとすると、気が遠くなる。

#### 【展開 1】

先程の有理数近似の欠点は、近似そのものを 10 進法で行っていることにある。10 進法では各位を 0~9 の 10 種類の数字から決定していくので苦勞する。一方、2 進法で扱う数字は 0 か 1 の 2 種類であるから、10 進法と比較して

各位の決定が容易になる。そこで、対数の性質を利用して、 $\log_{10} 2$  を 2 進法で小数表示することを考える。その過程を再度記す。

$$\begin{aligned} \log_{10} 2 &= \frac{1}{2^2} \log_{10} 16 \\ &= \frac{1}{2^2} \log_{10} (10 \times 1.6) \\ &= \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} \log_{10} 1.6 = \dots \dots \end{aligned}$$

対数を  $\frac{1}{2}$  倍する代わりに真数を 2 乗していく。これを繰り返し、真数が 10 を超えたら整数部分を 1 桁に落とす。すなわち、真数の桁上がりのタイミングで 2 進法の小数表示が進んでいくのである。簡単なアルゴリズムであるが、多くの生徒が理解に苦しんでいたように思える。

#### 【展開 2】

ここからグループ活動が始まる。理解に苦しんでいた生徒も、議論していくうちに徐々にそのアルゴリズムを理解できているようであった。最終目標は  $\log_{10} 2$  を小数第 4 位まで計算することであるが、時間内に 0.3010 まで辿り着いたグループは半数ぐらいであった。なかなか難しいミッションだったようである。

今回のグループ活動には議論を深める以外にも、電卓の役割を分担するという意図があった。真数を計算するための電卓、本編の 2 進法小数を計算するための電卓など、各自でそれぞれの役割を担い、互いに協力して活動できたグループは最後まで辿り着いていた。中には、電卓に表示されている真数計算の結果を途中の位で切り捨ててしまい、0.3010 に辿り着かないグループがあった。

#### 【まとめ】

時間の都合上、最後まで辿り着いたグループの結果を共有するに留まった。常用対数の近似値についてのその他の考察は次回となった。

## 4. 授業を終えて

$\log_{10} 2 = 0.3010$  まで辿り着くには、2 進法の小数表示を小数第 12 位まで進める必要がある。厳密に不等式で近似するとなれば、さらにもう 1 回進める必要がある。本時の振り返りで、生徒に  $\log_{10} 2$  を評価する不等式を作らせたが、やはり上からの評価ができなかった。また、常用対数の近似値について、他にはどのような考察ができそうか問うてみると、 $\log_{10} 2$  を 3 進法で小数表示してみる、 $\log_{10} 3$  を 2 進法で小数表示してみる（次頁参照）などの試みが見られた。中には、同様の方法で、 $\log_{10} 2$  を 10 進法で小数表示している生徒もいたが、呆気なく終わっていた。しかし、電卓を使わずに 10 乗の計算となると至難の業である。

「一人ひとりの学びを深める」というテーマで探究活動を実践するにあたり、簡単な四則演算だけで何かできないかと考えた結果、常用対数の計算に辿り着いた。その背景にあったのは

① 対数を新しい数として認識しているか

② 対数そのものの意味を理解しているか

という 2 つの疑念である。生徒は対数の計算はできるが、 $10^{\log_{10} 2} = 2$  という等式を見て首をかしげる。そういうことである。そこで、今回、生徒の自発的な活動を期待して、常用対数表記載の小数第 4 位まで計算するという試みとなった。ただ、2 進法で小数表示する手順を全て説明していたので、そのアルゴリズムを少しでも生徒に考えさせると良かったかもしれない。

今回は、本時の活動を次の時間の探究活動につなげるため、このような実践となったが、例えば、①については  $\log_{10} 2$  が有理数か無理数か考える、②については常用対数表を用いて

$$\begin{aligned} 3.14 \times 1.59 &= 10^{0.4969} \times 10^{0.2014} \\ &= 10^{0.6983} = 4.99 \end{aligned}$$

など積を和に変換する計算を考え、歴史的な背景に触れるだけでも生徒の意識は変わってくるのではないだろうか。教科書には自然現象と

対数の関係性について書かれているが、 $\log_{10} 2$  がどういう数なのかについてはそれほど詳しく書かれていないように思えるので、その辺りは指導者の腕の見せどころかもしれない。

最後に、公開授業を実施するにあたり、指導案の検討でご助言いただいた大阪教育大学瀬尾祐貴教授はじめ、ご協力いただいた多くの先生方に感謝いたします。また、授業に参加してくれた 64 期 2 年 1 組の生徒の皆さん、ありがとうございました。

## 5. 参考文献

- ・加藤一 著、『どうして  $\log_{10} 2 = 0.3010$  なのか?』, 数研通信 74 号
- ・清史弘 著、『大学受験生のための教科書 新数学 Plus Elite 数学Ⅱ・B』, 駿台文庫



(4) 常用対数の近似値について、他にはどのような考察ができそうか。

新たな考察

$\log_{10} 3$  は 2進法近似

それでは、考察してみてください。

$$\begin{aligned}
 \log_{10} 3 &= \frac{1}{2} \log_{10} 9 \\
 &= \frac{1}{2^2} \log_{10} 81 \\
 &= \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} \log_{10} 8.1 \\
 &= \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^3} \log_{10} 6.561 \\
 &= \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^4} \log_{10} 4.3046721 \\
 &= \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^5} \log_{10} 1.253020 \dots 41 \\
 &= \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^6} \log_{10} 3.4336 \dots 12 \\
 &= \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^7} + \frac{1}{2^7} \log_{10} 1.179018 \dots 58 \\
 &= \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^7} + \frac{1}{2^8} + \frac{1}{2^8} \log_{10} 1.39 \dots 68 \\
 &= \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^7} + \frac{1}{2^{11}} + \frac{1}{2^{11}} \log_{10} 1.427 \dots 96
 \end{aligned}$$

(4) 常用対数の近似値について、他にはどのような考察ができそうか。

新たな考察

$\log_{10} 3$  は 3進法

それでは、考察してみてください。

$$\begin{aligned}
 \log_{10} 3 &= \frac{1}{3} \log_{10} 3^3 \\
 &= \frac{1}{3} \log_{10} 2.7 \log_{10} 10 \\
 &= \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \log_{10} 2.7 \\
 &= \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} (\log_{10} 1.9683 + \log_{10} 10) \\
 &= \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^2} \log_{10} 1.9683 \\
 &= \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} (\log_{10} 1.713 + \log_{10} 100) \\
 &= \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{2}{3^3} + \frac{1}{3^3} \log_{10} 1.713 \\
 &= \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{2}{3^3} + \frac{1}{3^4} (\log_{10} 1.789 + \log_{10} 10) \\
 &= \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{2}{3^3} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{3^4} \log_{10} 8.7189 \\
 &= \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^5} + \frac{1}{3^5} \log_{10} 662818 + \log_{10} 1000 \\
 &= \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{2}{3^3} + \frac{1}{3^5} + \frac{1}{3^5} \log_{10} 6.62818 \\
 &\quad \sim 0.47589451303153
 \end{aligned}$$

$\log_{10} 2$  は 3進法

$$\begin{aligned}
 \log_{10} 2 &= \frac{1}{3} \log_{10} 8 \\
 &= \frac{1}{3^2} (\log_{10} 100 + \log_{10} 5.12) \\
 &= \frac{2}{3^2} + \frac{1}{3^2} \log_{10} 5.12 \\
 &= \frac{2}{3^2} + \frac{1}{3^3} (\log_{10} 100 + \log_{10} 1.34217728) \\
 &= \frac{2}{3^2} + \frac{2}{3^3} + \frac{1}{3^3} \log_{10} 1.34217728 \\
 &= \frac{2}{3^2} + \frac{2}{3^3} + \frac{1}{3^4} \log_{10} 2.4178 \dots 58 \\
 &= \frac{2}{3^2} + \frac{2}{3^3} + \frac{1}{3^5} + \frac{1}{3^5} \log_{10} 1.4134 \dots 07 \\
 &= \frac{2}{3^2} + \frac{2}{3^3} + \frac{1}{3^5} + \frac{1}{3^6} \log_{10} 2.8240 \dots 17 \\
 &= \frac{2}{3^2} + \frac{2}{3^3} + \frac{1}{3^5} + \frac{1}{3^7} + \frac{1}{3^7} \log_{10} 2.25216 \dots 81
 \end{aligned}$$