空間図形の教材としての結び目

柳本朋子（大阪教育大学　数学教育部門）
東尾晃世（関西福祉科学大学）
小山真佳（大阪市立長原小学校）
樹下堅（和泉市立国府小学校）
阪下萌恵（京都市立桃山小学校）

（2021年3月31日受付）

概要：筆者らを含む「結び目の数学教育」研究プロジェクトでは，「結び目の数学」をもとに空間図形の教材や数学的な探究活動の教材を開発し，小中学校および高等学校における実践をすすめてきた．本研究では特に空間図形の教材としての結び目に着目して，結び目を用いた学習が，従来の学習内容で扱われるような空間図形についてもその図の読み取りに影響を与えるかどうか，小学校4年生を対象とした授業実践を通して調べた．その結果，事前調査で見られた課題について大きな改善は見られなかったものの，図に表された空間図形の辺の重なりに着目して，辺の前後の位置関係をより慎重に読み取るようになったことが分かった．

検索語：空間図形，結び目，立方体，小学校，授業実践

Ⅰ．研究の経緯

1．“結び目の数学”とその教材

まず，本研究の背景として“結び目の数学”をごく簡単に紹介したうえで，空間図形の教材としての結び目について紹介する．たとえば1本のひもを結ぶとき図1aのような結び方（一重結び目）がある．このままでは端からひもをほどくことができるので，結び目のない1本のひもと区別することができなくなる．そこで，そこで，ひもの両端を図1bのようにつないだものを“結び目”とする．すなわち，“結び目”とは空間内で自分自身とは決して交わらないような閉曲線のことをいう．また，図2左のように結び目を平面に射影したものを射影図という．ただ，射影図では各交差点におけるひもの上下がわからないので，射影した平面に近い方の曲線を途切れてかくことによりひもの上下がわかるように表すことにする（図2右）．このようにして表した図を“結び目図式”という．以降，空間内の結び目を表すときも，1本の曲線でかつ図式と同様に交差の上下を区別して表すことにする．図3aと図3bの結び目は結び目図式では交差点の数が違うが，図3bの結び目をひもを切らずにあやとりの要領で動かしていくと図3aの結び目に変形することができる．

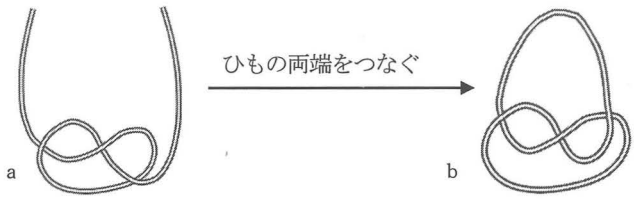


図1　結び目とは

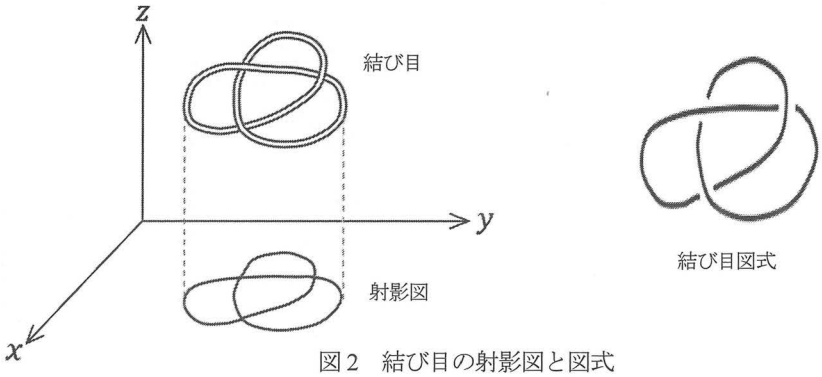


図２　結び目の射影図と図式

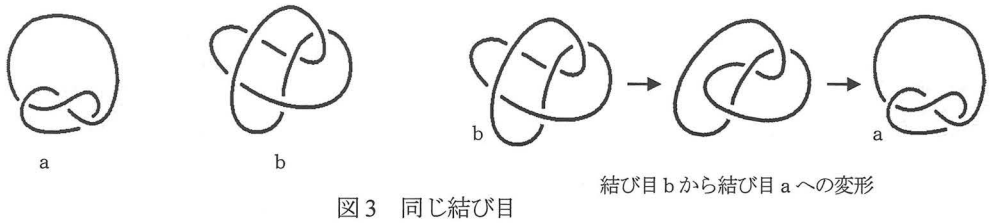


図３　同じ結び目

結び目のひもを切らずにあやとりの要領で動かし変形していくことは，ライデマイスター移動Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ（図４）を有限回行うことになる．このように，有限回のライデマイスター移動によって同じ形になる２つの結び目のことを “同じ結び目” という．

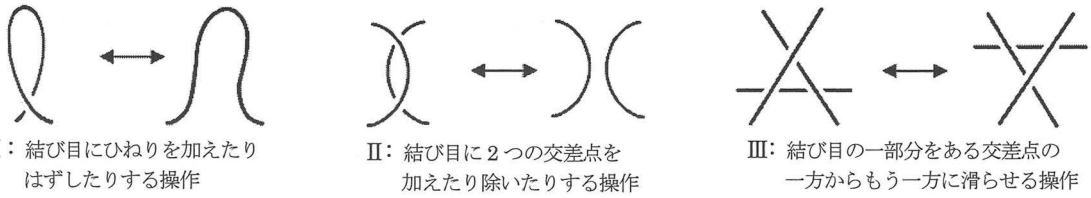


図４　ライデマイスター移動

図５ｂと図５ｃの結び目はほどいていくと図５ａのように輪になる．このように，ライデマイスター移動による変形によって輪になる結び目のことを“自明な結び目”という．自明でない結び目の中で交差点の数が一番少ない結び目は３つの交差点からなり“三葉結び目”といい（図６ａ），４つの交差点からなる結び目を“８の字結び目”という（図６ｂ）．また，祝儀袋によくみられる“あわじ結び目”は結び目図式では図６ｃのように表すことができる．さらに，いくつかの結び目の集まりの状態を絡み目という．図６ｄ，６ｅは絡み目の例である．結び目の数学の研究の目的は，与えられた２つの結び目（絡み目）が同じかどうかを判別することと，ほどけない結び目（絡み目）の中にどのような種類の結び目があるのかを分類することに大別される[1]．

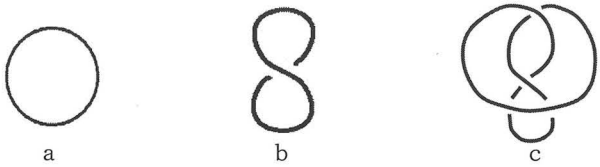


図５　自明な結び目（ほどける結び目）

a：三葉結び目　b：8 の字結び目　c：あわじ結び目　d：ホワイトヘッドの絡み目　e：ボロミアン環

図 6　ほどけない結び目と絡み目の例

結び目の数学の研究では，同じ結び目に対して不変な量，つまり，ライデマイスター移動によって変わらない“結び目不変量”が開発されてきた．三彩色可能性，結び目解消数，(絡み目の)絡み数，多項式不変量などがある．これらに関して詳しく知りたい場合は「結び目の数学」(C.C.アダムス著，金信泰造訳)[1]，「結び目の理論」(河内明夫編著)[2]などを参照されたい．

一方、結び目は空間図形の教材としての検討もすすめられている．Handa & Mattman (2008) は、低学年向けに結び目理論を教えることについて，低学年での平面上の単純な閉曲線(円)の学習から，それを空間内の閉曲線に拡張することが非常に自然であることを述べ，小学生への結び目の教育を提案している．[3] 筆者らを含む結び目の数学教育研究プロジェクトでは，交差点数の少ない結び目を様々な視点から観察したり，あやとりの要領で動かしたり，また結び目図式から結び目を動かす様子を想像して図に表したりすることは，「空間図形をとらえる力」の育成に役立つのではないかと考えている．ここでの「空間図形をとらえる力」とは特に位置関係に関するもので，2 次元に表された図から，3 次元空間における辺や面の前後や上下の位置関係を読み取り，その図をもとに反対側から見たときの前後・左右の位置関係を想像して図に表したり，一部を変形したりしたときの位置関係を想像したりする力を意味するものとする．とくに，結び目図式ではひもの長さや曲がり具合やひもの交差の角度などは気にせず，交差点のひもの上下を正しく表すだけで空間図形としての結び目を表すことができる．交差の上下の情報を正しく読み取ったり表現したりすることは重要で，上下が 1 か所入れ替わるだけで，ほどけなかった結び目がほどける結び目になることもある（図 7）．

図 7　ほどけない結び目とほどける結び目

一方，学校で扱う立方体のような空間図形の見取り図では，長さや角度が変わればそれらしく見えなくなることがある．また，面で隠れた辺は破線で表すことで前後の位置関係を読み取ることになる．前述のような空間図形をとらえる力をより早い段階から育てるための扱いやすい空間図形として結び目が適切ではないかと考えた．実際，柳本らによれば，小学校中学年では交差点が 3 つの結び目なら立方体の見取図よりも表しやすいことがわかってきた．調査の詳細は「「結び目の数学」の教育について（2）」(柳本ほか) [4]に書かれているのでここではその概要を述べておく．

対象は小学校 1 年生から 6 年生まで各 1 クラスずつ合計 193 人で，一辺 3cm の立方体と，それとほぼ同じくらいの大きさの三葉結び目を，それぞれ視点を固定して見えたとおりにかかせた (写真 1,2, 図 8)．ただし，結び目については，ひもが重なって見える部分は下側を切り離してかけばよいことを、２色のひもを重ねて見せながらその図のかきかたをあらかじめ示した（図 9）．

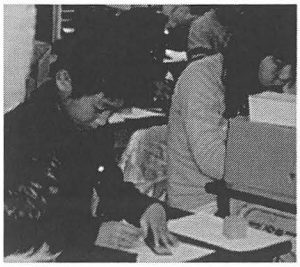


写真１ 立方体をかく児童の様子

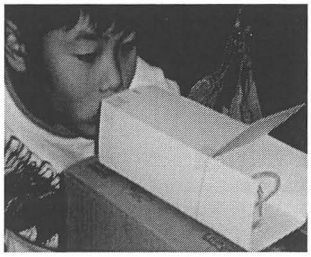


写真２　箱からひもを覗く児童の様子

図８　箱を覗いて見える結び目

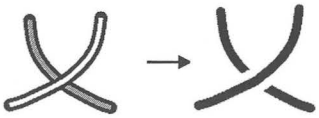


図９　２色のひも（左）とその図（右）

モデルの立方体は小さいサイズであったので向かい合う辺どれもほぼ平行に見えていた．そこで，児童がかいた立方体の図を主に辺の平行関係の観点から分析したところ，次の５段階に分けることができ（図 10），各学年における段階ごとの人数は図 11 のようになった．

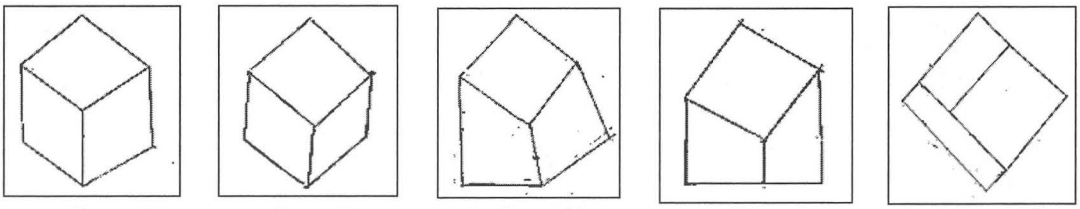
段階 A: ３つの面を平行四辺形で表現している．

段階 B: 縦・斜めの平行は両方とも保てているが、上の面が正方形のままである．

段階 C: 縦・斜めの平行が少なくともひとつ保てておらず、かつ上の面が正方形のままである．

段階 D: 机に接する辺が一直線になり、かつ上の面の角が直角のままである．

段階 E: 面のつながりが正しくない．



段階 A の例　段階 B の例　段階 C の例　段階 D の例　段階 E の例

図 10　立方体表現の５段階

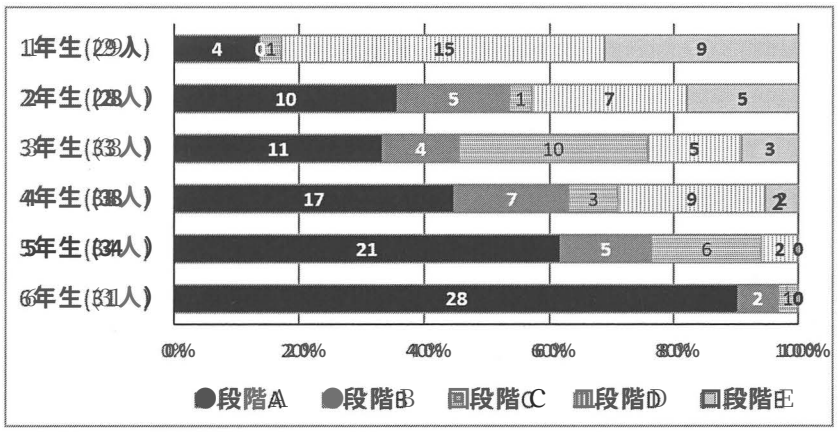
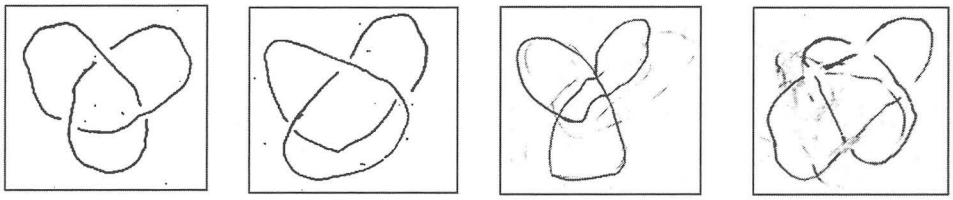


図 11　立方体表現の各段階の人数

一方，三葉結び目については，交差点の数やひもの上下の重なりについて正しく表現できているかという観点から，次の4段階に分けることができ（図12），各学年における段階ごとの人数は図13のようになった．

段階A：　3つの交差点においてひもの上下の位置関係が正しく表現されている
段階B：　3つの交差点の内、1か所だけ交差の上下が逆になっている
段階C：　3つの交差点のいずれも交差の上下を表現していない
段階D：　交差点の数が違うなど、全体的な形が間違っている



段階Aの例　段階Bの例　段階Cの例　段階Dの例

図12　三葉結び目の表現の4段階

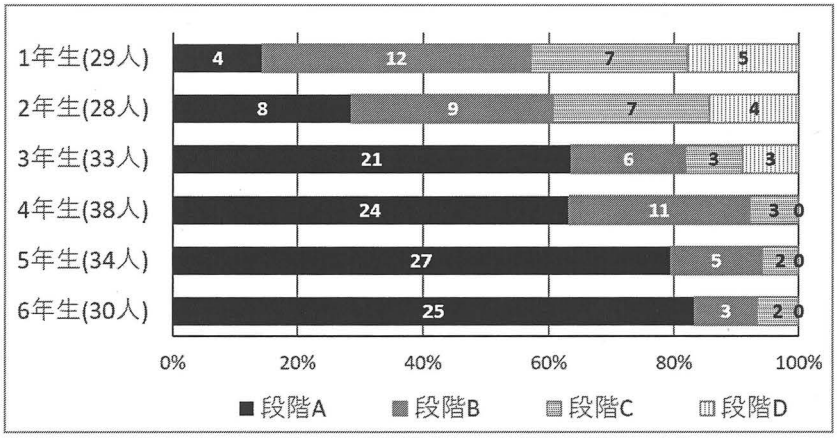


図13　三葉結び目の表現の各段階の人数

このことから，立方体と三葉結び目のそれぞれの段階Aの人数を比較すると，小学校中学年では，交差点の数が3つの結び目なら立方体の見取図よりも表しやすいことがわかった．

これらの結果をふまえて，結び目の数学教育プロジェクトでは，小学校のできるだけ早い段階から空間図形を観察し表現することができる”教材としての結び目”を開発し，それによって児童・生徒が以下のような学習活動ができることを確認してきた．以下の学習活動(1)から(7)の図や写真は報告書「結び目の数学教育」への導入ー小学生・中学生・高校生を対象としてー」（河内明夫・柳本朋子編）第1号～第5号から引用したものである。詳細はそちらを参照されたい[5),6),7),8),9)]．

(1) 交差点を1つもつようなひもの交差について，上下を図で表すこと（図14）（小学校2年生：報告書第5号）

(2) 交差点の数が最大3つに見えるほどける結び目（写真）を実際に様々な視点から見て図で表すこと．（写真3，図15）（小学校6年生：報告書第4号，小学校4年生：報告書第5号）

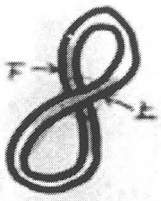


図14

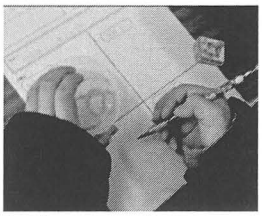


写真3　透明カップの中の結び目を観察する様子

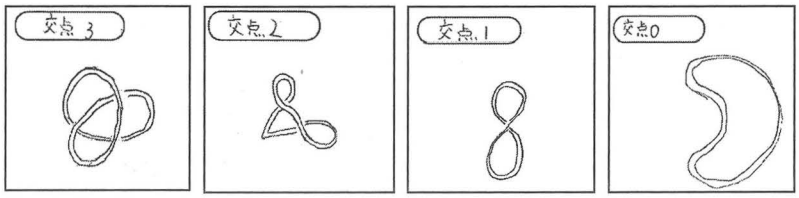


図15　1つの結び目を異なる視点から見たときの図

(3) ある視点から見た結び目図式（例：図16）をもとに，その反対側から見たときの結び目を交差の上下を想像して図示すること（小学校4年生：報告書第2号）

図16　反対側から見たときの結び目を想像してかく

(4) 交差点の数が3から10程度のほどける結び目図式をもとに，実際の結び目を使わずにほどいていく様子を図示すること（図17）（小学校4年生：報告書第2号，6年生：報告書第4号，中学校1年生：報告書第5号）

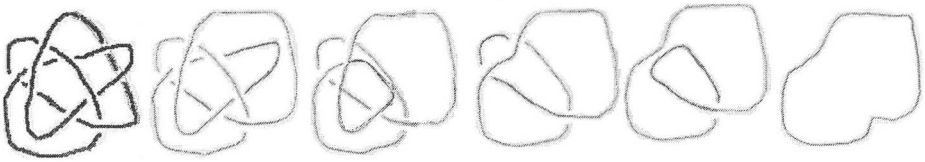


図17　トレーシングペーパーを用いて結び目をほどいていく様子（児童の作品）

(5) 図18のような交差点の数が5から8程度のほどけない結び目図式をもとに，実際の結び目を使わずに一部を動かしながら交差点の数を減らしていく様子を図示すること（小学校4年生：報告書第2号，6年生：報告書第4号）

図18　ほどけない結び目の図式

(6) 図19のような交差点の数が5から8程度のほどけない結び目図式をほどける結び目の図式に変えるために，交差点の上下をできるだけ少ない回数で入れ替え ること（小学校6年生：報告書第3号）

図19　ほどけない結び目の図式

(7)ある視点から見たときのほどける結び目図式（図 20 a）と，その結び目を別の視点から見たときの図式（図 20 b）を与え，その結び目の空間内での形を想像して実際に作り，その結び目がどのような空間図形かがわかるように図で示すこと（中学校 1 年生：報告書第 5 号）

図 20　ある視点からみたときのほどける結び目図式 a と別の視点から見たときの結び目図式 b

一方で，これらの結び目の学習活動が，従来から学校で扱われている立方体や直方体などの空間図形の理解に影響を与えるのかどうかを調べる必要性があると考え，空間図形をとらえる力の一端を測るための調査を考案し，児童生徒の現状と課題を探ることとした．これについて次節で述べる．

2．空間図形の読み取りに関する調査について

以下の調査は，柳本らにより 2016 年から 2019 年にかけて小中学生を対象に行ったもので，その内容と結果は以下のようであった[10]．

調査目的：立方体フレームの図から，空間における辺や面の前後（上下）の位置関係を正しく読み取れるかどうかを調べる

調査対象：公立小学校 5 校の 1～6 年生 計 932 人，公立中学校 3 校の 1～3 年生 計 509 人

調査の結果は，表 1，図 22 のとおりである．

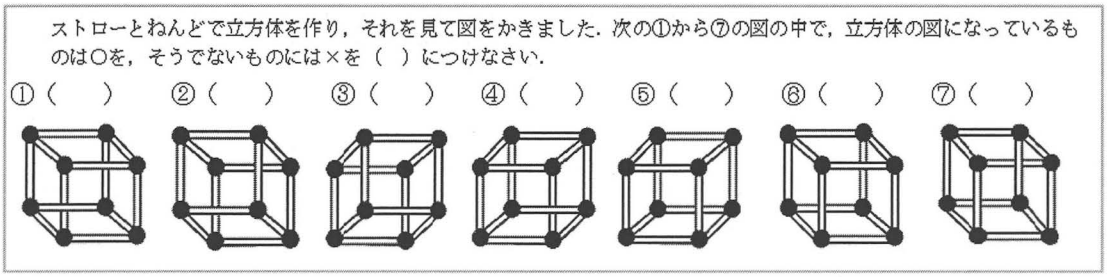


図 21　調査問題

表 1　調査結果（正答率）

			①	②	③	④	⑤	⑥	⑦
	学年	人数	正答×	正答○	正答○	正答×	正答○	正答○	正答×
小学校 (N=932)	1	168	57.7%	33.3%	31.0%	68.5%	81.0%	76.8%	60.7%
	2	116	59.5%	29.3%	31.0%	73.3%	80.2%	81.9%	63.8%
	3	138	66.7%	29.0%	32.6%	78.2%	91.3%	88.4%	68.9%
	4	139	68.3%	32.4%	30.2%	70.5%	87.8%	82.0%	71.2%
	5	137	78.8%	34.3%	27.8%	80.3%	91.2%	86.9%	85.4%
	6	234	75.2%	32.5%	35.0%	79.1%	88.5%	80.3%	71.8%
中学校 (N=509)	1	72	86.1%	34.7%	31.9%	87.5%	93.1%	87.5%	84.7%
	2	224	92.9%	31.3%	30.8%	88.8%	94.2%	89.7%	89.3%
	3	213	80.3%	43.7%	40.8%	83.1%	93.4%	88.3%	78.9%

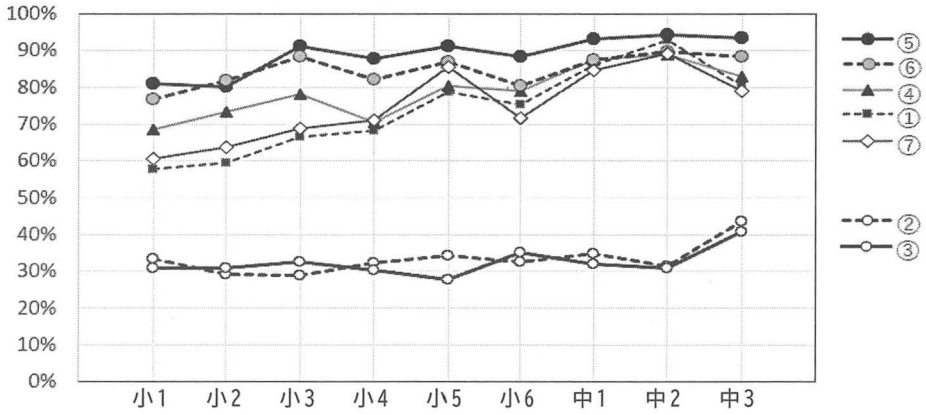


図 22　正答率についての学年の変化

調査問題（図 3）の①-⑦は，次の 3 つのグループに分けることができる．

A グループ（⑤,⑥）：図 23a, 23b のように立方体を斜め上の視点から眺めたときのフレーム図

B グループ（②,③）：図 23c, 23d のように，立方体をさらに上の視点から眺めた，あるいは斜め下の視点から眺めたときのフレーム図

C グループ（①,④,⑦）：辺の重なりの上下が 1 か所違うため，立方体の図を表していないもの

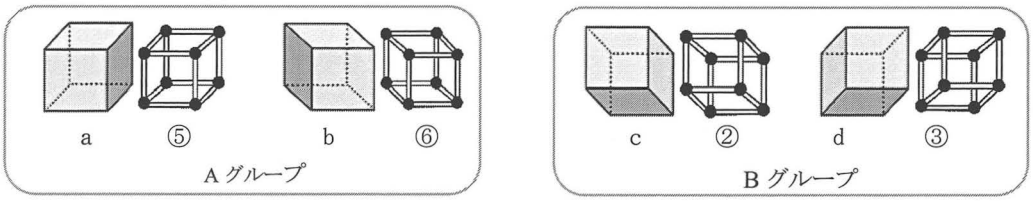


図 23　A グループと B グループの立方体

表 1，図 22 より，全ての学年において A グループ（図⑤，⑥）の正答率は高く，B グループ（図②，③）の正答率が際立って低く，その正答率は学年が上がってもそれほど大きく変化しないことがわかった．A，B グループとも立方体の図であるにも関わらず，なぜこのような違いがあるのだろうか．そこで，児童・生徒がどのように図を読み取っているかを探るために，調査問題の図②，③を立方体でないと判断した生徒を数人抽出し,その理由をたずねところ，“辺が重なっているところの上下が 2 か所とも間違っている”というような発言が返ってきた．そこで，彼らに交差点の辺の上下を 1 か所ずつ確認させると，各部分の上下については理解できるものの 2 つの面（たとえば調査問題の図②の面 ABCD と面 EFGH（図 9）の上下の位置関係がとらえられないことが分かった．そのため，さらに図 25 のように上側にある面に色をつけさせると“面が浮き上がって見える”と生徒が驚いていた．このことから，調査問題の図②，③を立方体ではないと判断した生徒の中にはそれらの図の中の 2 つの面（図 24 の面 ABCD と面 A’B’C’D’）を上側（手前側）にあると読み取っていない生徒がいるということが分かった．

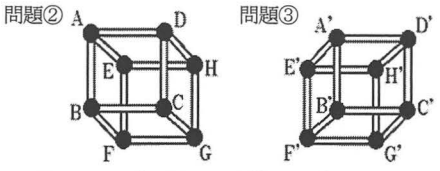


図 24　調査問題の図②と図③

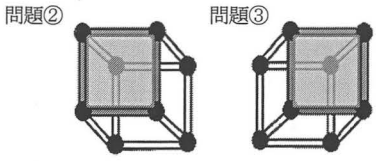


図 25　調査問題の図②と図③の上側の面に着目

調査対象のどの学年においても約60%が図24の面EFGHと面E'F'G'H'が上側（手前側）だと読み取ってしまうのはなぜだろうか，その理由を考えてみる．まず私たちの日常生活から考えてみたい．日常生活ではティッシュペーパーの箱や菓子箱や段ボールの荷物箱が調査問題の⑤や⑥だけでなく②や③のように見えることがよくある．ただし，どのように見えているかを意識して“観る”ことはあまりないないだろう．辺の位置関係などに着目して“図形を観る”ということは数学的な見方であり，それを育てることは学校教育で期待されるところである．では，学校教育ではどうだろうか．小学校学習指導要領「算数」では「図形についての豊かな感覚の育成を図る」ことが図形領域のねらいの一つとされ，特に4年生では，「図形を構成する要素及びそれらの位置関係に着目」することが挙げられている[11]．2年生では直方体と立方体の頂点・辺・面に着目する素地的な学習，4年生では展開図や見取図を扱って辺や面の位置関係（垂直・平行）を調べる等，立体図形の構成の仕方を考察することを通して図形の性質を見出す学習を行っている．一方，現行の小中学校の教科書で扱われている多くの立方体や直方体やその見取図については，調査問題の⑤のように斜め上の視点から図示されていることが多い．また，さらに実際の授業では立方体や直方体の箱を実際に手にとって観察する活動はあるものの，さまざまな視点から観察したりそのときに見える面の形や2つ辺の前後・上下などの位置関係を考察したりする場面があまりなく，ましてや様々な視点から見た立方体や直方体を図表現する活動はほとんどないのではないかと考えられる．そのため，今回の調査問題のような図を見たとき，多くの児童は見慣れた立方体の図と同じ視点から見た図だと思い込み，図から立方体の辺の前後（あるいは上下）の位置関係を注意深く観察して読み取ろうとしなかった児童・生徒が多かったのではないかと考えられる．

このようなことから，空間図形を様々な視点からみて図に表したり，辺や面の前後（あるいは上下）の位置関係を考察することが，図に表された空間図形の前後（上下）の位置関係を読み取り，それをもとに別の視点から見たときの図をイメージしたりするというような“空間図形をとらえる力”を育てることにつながるのではないかと考えた．さらに，結び目の教材は，結び目だけにとどまらず従来の学校で扱われている立方体や直方体などの空間図形をとらえる力を育てることにも有効に働くことが期待されるのではないかと考えた．そこでまず，中学校1年生における結び目の授業実践の前後でこの調査を行い比較したところ，この学習活動を行わなかった生徒に比べて正答率が明らかに上昇するという結果が得られた．[9]

Ⅱ．研究の目的と方法

本研究は前述の中学校1年生における結び目の授業による空間図形を捉える力についての検証に引き続き，小学生を対象とした結び目の授業実践において同様の変化がみられるのかどうかを調べることを目的とした．

方法として，小学校6年生を対象に，結び目を様々な視点から空間図形を観察する授業実践を行い，事前・事後調査によって授業実践の効果を考察した．授業の内容は，先行実践を参考として様々な視点から結び目を観察するという活動に焦点を当てた．

Ⅲ．小学生を対象とした結び目の授業実践とその効果について

1．教材として扱う結び目について

まず，はじめて結び目を学ぶ小学生にとっても扱いやすいように，以下のような点に留意しながら扱う結び目の形を検討した．

- 児童が交差点におけるひもの上下に着目しやすいように，図で表したときに交差点数が少ないものであること
- 様々な視点から見たとき，図で表しやすいものであること

・様々な視点から観察したとき，交差の上下について，児童が驚くような活動ができるものであること

その結果，図26のような結び目を教材として用いることにした．この結び目は様々な視点から観察したとき，見える交差点の数は多くとも1つであり，その交差点のひもの上下の関係にだけ着目しやすいと考えられる．また，結び目を見る視点によって「8」のように見えるのに，交差点のひもの上下関係が同じように見えたり逆に見えたりする．そのことが児童にとっても驚きになり，ひもの上下（前後）の位置関係を注意深く観察するようになるのではないかと考えた．

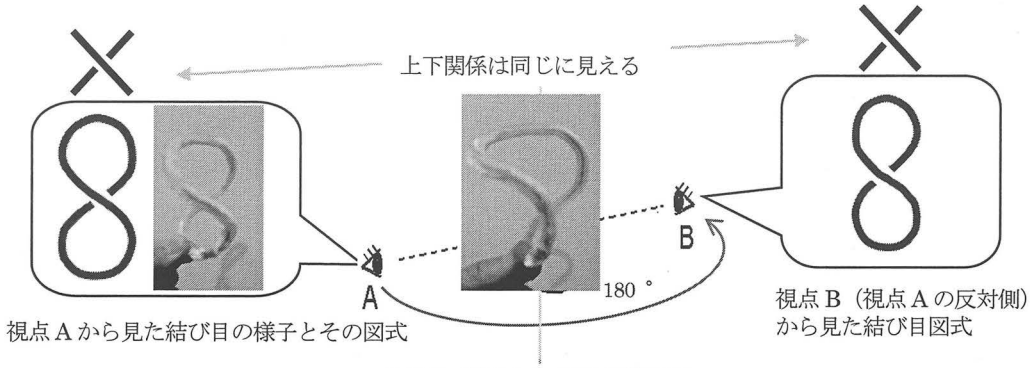


図26　教材として扱う結び目

たとえば，児童ははじめに見た視点の反対側から見た結び目がどのように見えるかを想像するとき，「反対」という言葉に影響されて交差点の上下関係も反対になると思い込み，もとの結び目と交差点の上下関係が同じように見えることに一見不思議に思うかもしれない．しかし，実際に視点を徐々に変えていきながら見える様子を観察したり，結び目そのものを鉛直方向の軸を中心に180度回転させていく様子を観察すると，交差の上下関係は同じように見えることを確かめることができる．さらによく観察すると，交差の上下関係は同じように見えても，上下（前後）のひもは入れ替わっていることも確かめることができる．また，この結び目を図27のように水平方向の軸を中心に回転させていくと同じような「8」の形に見えるのに交差点の上下関係だけが反対に見えることがある．

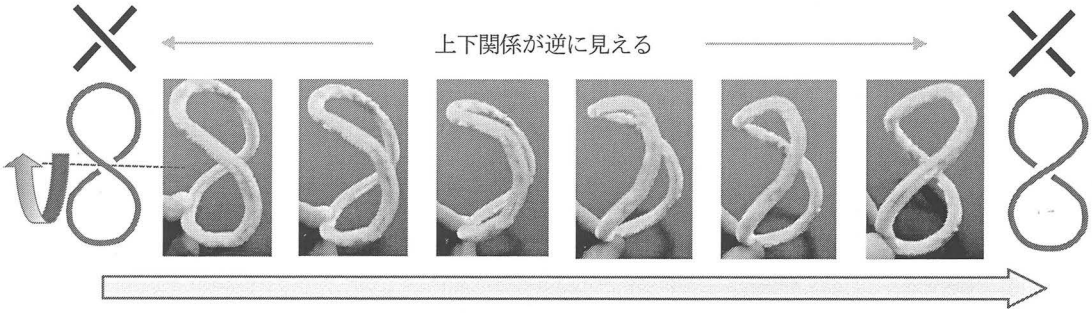


図27　結び目を水平方向の軸を中心に回転させたときの様子

上記のような結び目の観察は，児童にとって驚きを生むことになるのではないかと考えた．ただし，実際の授業でこの結び目を扱うためにはさらに以下のような条件が必要であると考えた．

・児童一人一人が手元で観察できる

・児童が手に持っても結び目が形をくずれないようにする

・児童の発見や考えを共有しやすいように，どこからみたか説明しやすいようにする

そこで，写真１のようにして，同じ向きから同じような形にみえるように結び目を透明カップに入れ，カップのふたには４か所に違う色の印をつけたものを児童の人数分作成した．

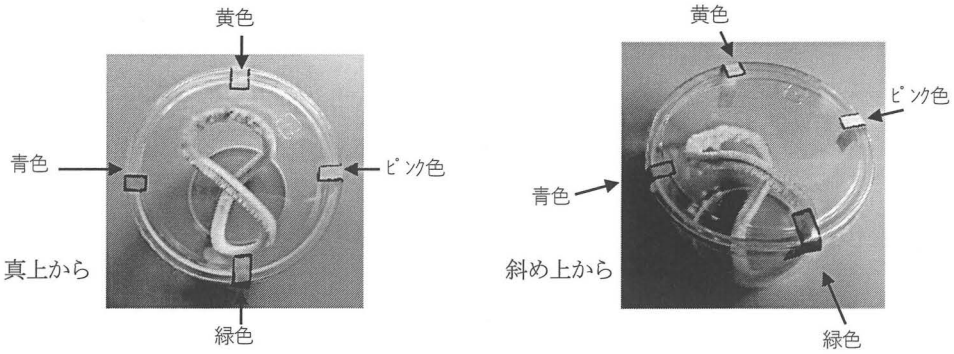


写真４　透明カップの中の結び目を真上から見た時と斜め上から見た時の様子

２．授業実践の内容と児童の様子

授業は公立小学校２校の６年生 計193人を対象に，2019年３月に行った．授業の目的は，２本のひもの重なりを見て上下の位置関係を理解して図で表したり，図からひもの上下の位置関係を読み取ったりすることができるようになること，また，一つの結び目を様々な視点から見てそのひもの重なりや形の違いに気づくことができるようになることである．指導計画（全２時間）は以下の通りである．

第１時　ひもの重なりを図で表す

・見えている結び目をひもの重なりの前後（上下）がわかるように図で表す

・反対側から見た結び目のひもの重なりを予想して図に表す

第２時　いろいろな視点から結び目を見て，図に表す

・視点を変えてみることで，結び目の見え方や交差点のひもの重なり方が変わることを知る

各次の指導と児童の様子は以下のとおりである．

（１）第１時

【交差点のひもの上下関係に関心を持つ】はじめに，交差点のひもの上下に着目させるために，交差点を隠した結び目の写真（写真5）を見せ，どちらのひもが上に重なっているかを予想させた．児童は自分の予想を伝えるために，鉛筆や指などを使ってひもの重なりを表現していた．その後，実物（写真6）を見せて，どちらが上になっているかを確認した．

【交差点のひもの上下関係を図で表す】次に，ひもの重なりの部分についてどちらが上かがわかるように，ひも（結び目）の見えている様子を図に表現させた．多くの児童がひもを２本の線で表現し，重なりの部分をどう表現してよいか悩んでいたが，図28ａのように下側の線をかかなかったり，図28ｂのように点線で表す児童が多かった．そこでひもが重なっている部分の下側の線は，見えていないことを２色の棒を重ねて見せて確かめたうえで，図28bのような点線もかかなくてよいこととした．また，数人が図13ｃのように１本の線で表しており，その中には上側の線を後から重ねてかいたり，下側の線をわずかに途切れてかいたりすることでひもの上下の違いを表そうとしている児童もいたが，このままではどちらが上側か（自分はわかっても）他の人には“伝わらない”ということから，１本の線で図に表す際は途切れて見える部分がより分か

りやすくなるように少し離してかく（図5b）ように助言した．さらに，児童がかいた図を取り上げ，ここではひもの長さ・太さ・丸の形や大きさに違いがあっても同じひもの形を表す図として認めることを共有した．

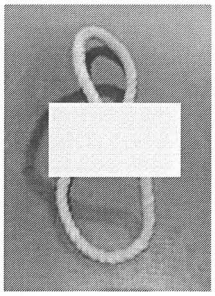


写真5

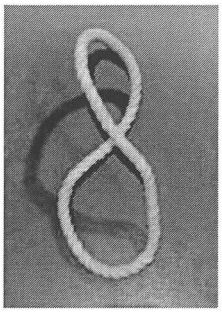
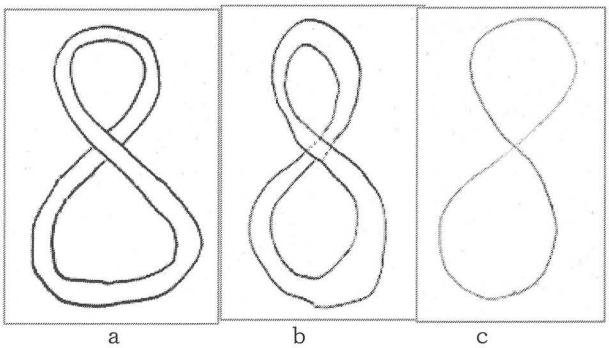


写真6



a　b　c

図28　児童がかいた図

【反対側から見たときの交差の上下関係を想像し，確かめる】さらに，実物を提示しながら（写真7a）「反対側から見るとどのように見えるか」を想像してかく活動を行った．約3割の児童が交差の上下が反対に見えると答え，残りの児童は交差の上下は変わらないと答えた．そこで，実物を持って児童の反対側から見ている教師がその場で写真を撮ってみせたり，児童側から見た視点と教師の視点が同じになるように実物を持ったまま180度回ったりして見せ交差の上下を確認させた（写真7a，b，c）．児童と反対側から見ていた教師が，写真7のように児童と同じ向きで立って，実物を持ったまま180度回転させたりすることにより，児童は“反対側から見る”ことは，自分自身が動かなくても“結び目を回して見る”ことと同じだということに気づいた．さらに，各児童がモールの結び目を手元で操作して観察することにより，反対側から見ても交差の上下は変わらないことを確かめることができた．しかし，反対から見てもひもの重なりがもとの重なりと同じに見えることがどうしても不思議だという児童もいたため，色の違う棒を使って実演して見せた．そこでは，交差の上下だけで見ると同じように見えるが交差しているひもそのものは前後が入れ替わっている．その様子を見た児童は，実感がもてるようになるために自分の手元でモールの結び目を何度もゆっくり動かしながら前後それぞれのひもが動く様子を確かめていた．さらに数人の児童は“上下にひっくり返したらどう見えるか”と疑問をもったため全員で確かめたところ，交差の上下が変わらないように見えることに驚くとともに，その様子をじっくり観察して納得していた．（子どもに配布したモールは，写真8のような動きが見えるものであった．）

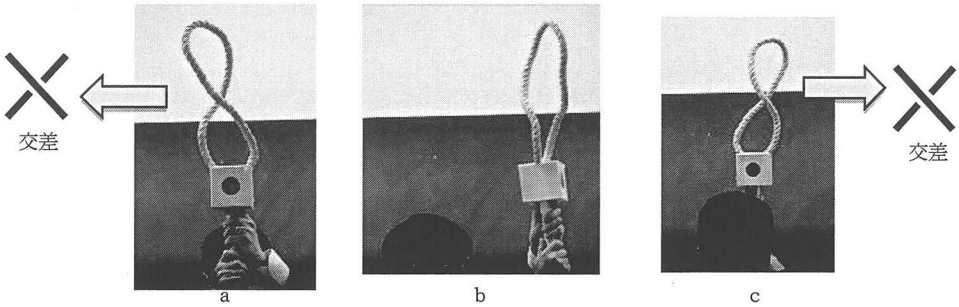


写真7　教師が結び目を持って回り，交差の上下の関係を見せる様子：
（結び目の下の四角い台には一方に青色の○印，他方に赤色の○印がついていて，
結び目の向きが変わったことがわかるようになっている．）

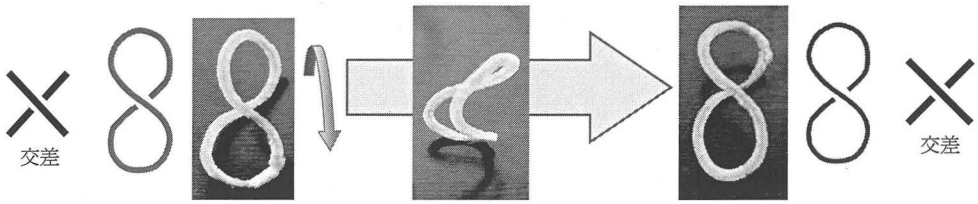


写真8　結び目を上下にひっくり返して見る

（2）第2時

【前時と同じように見える結び目をカップの真上から見る】ふたつきの透明カップに入った結び目を各児童に配布した．カップには視点を明確にするために上蓋の上下左右4か所に4色のテープをつけている．また，真上からと真下からしか見えないように，側面に紙を巻き付けた（写真9）．児童はまずこれを蓋の真上から見て，第1時に見えた結び目の交差と同じように見えることを確認した．その後，第1時で学習したこと（反対側から見ても交差の上下は変わらない）を確認するために，カップを底側から観察した．

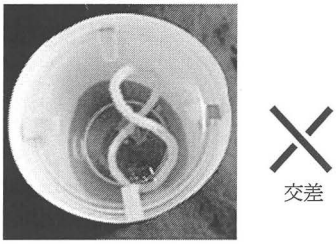


写真9　側面を隠したふたつき透明カップの中の結び目

【交差の上下関係が逆に見える視点を見つける】次に“交差の上下の重なりが逆に見えることがあるか”と尋ねたところ，前時ではどのようにひっくり返しても交差の上下は変わらなかったことから，全員が“絶対に交差が逆に見えることはない“と答えた．　そこで，カップの側面の紙を外して結び目を様々な方向から観察させたところ，交差の上下が逆に見える視点を見つけた児童がでてきた．その児童が見えた視点から教師が写真を撮って全員に共有し，他の児童も同じ視点から見て確認した．このとき，「黄色の印を手前にしてカップを横から見る」というような言語表現を引き出すことができた．さらに，左右をひっくり返しても上下をひっくり返しても交差の上下が変わらないという前時の学習を思い出し，交差の上下が入れ替わって見える視点が他にもあることに気付いた児童がいた．その意見をもとに，他の児童も交差の上下が逆に見える新たな視点を予想することができた（写真10）．児童は，結び目を様々な視点から見る活動を通して，一つの形が視点を変えるだけで見え方が大きく変わることに驚きと興味を示した．また，見え方の変化を確認するためにカップを少しずつ，何度も動かしていた．

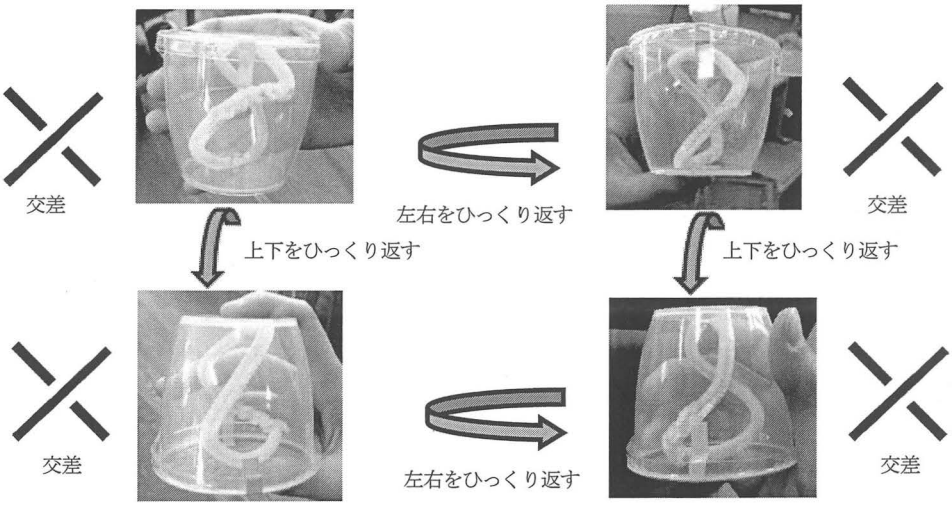


写真10　交差の上下が逆になるようなカップの向きを探す

その後，カップを動かし様々な視点から見える形を図にかかせた．図29のように交差点がない丸い形や三日月の形をかく児童も見受けられた．児童は，カップの蓋につけた4色のテープの色を使って自分が見えている視点の方向を表現できたため，丸い形や三日月の形が見える視点の方向を特定し，共有することができた．

以下は，授業後の児童の感想である．

- *私は8の形の交わりが逆に見えることがあるなんてあり得ないと思っていましたが，横から見ると8の交わりが逆になっていておもしろかったです．見方を変えることで，あそこまで変わるとは思いませんでした．*
- *とても楽しかったです．こういう仕組みになっているんだと思いました．もっとこういうことを勉強したいです．*
- *いろいろな角度から見て，左の方が上の8や右の方が上の8が見えました．他にも円や半月みたいな形があっておもしろかった．*

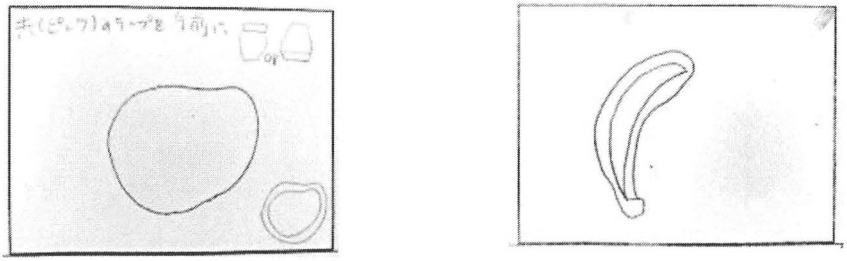
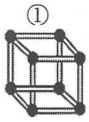


図29　別の視点から見た結び目

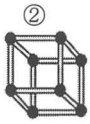
3　事前・事後調査による考察

授業実践対象者（6年生187人）に，第Ⅰ章で述べた調査（図7）を実践の事前・事後に行った．（2019年1月・3月）調査結果は以下の通りである．ただし，事後調査では，事前調査の図の順番を入れ替えて行った．表2は事前・事後調査の正答数と誤答数を表している。図番号は事前調査の番号を表している。

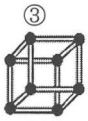
表2　事前・事後調査における正答数及び誤答数

①


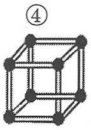
事前＼事後	正	誤	合計
正	145	9	154
誤	20	13	33
合計	165	22	187

②


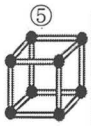
事前＼事後	正	誤	合計
正	26	20	46
誤	33	108	141
合計	59	128	187

③


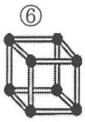
事前＼事後	正	誤	合計
正	23	37	60
誤	24	103	127
合計	47	140	187

④


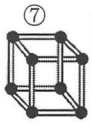
事前＼事後	正	誤	合計
正	139	10	149
誤	26	12	38
合計	165	22	187

⑤


事前＼事後	正	誤	合計
正	166	4	170
誤	12	5	17
合計	178	9	187

⑥


事前＼事後	正	誤	合計
正	156	2	158
誤	27	2	29
合計	183	4	187

⑦


事前＼事後	正	誤	合計
正	130	14	144
誤	34	9	43
合計	164	22	187

まず，①から⑦までの各図について事後調査で解答が変化した児童数の割合，すなわち，(1)事前調査で誤

答した児童の内，事後調査で正答した児童の割合，(2)事前調査で正答した児童の内，事後調査で誤答した児童の割合，に着目してみる．たとえば，図①では，(1) $\frac{20}{33} \fallingdotseq 0.67$，　(2) $\frac{9}{154} \fallingdotseq 0.06$ となる．同様にそれぞれの図について調べると以下のようになった．ここでは，図①，④，⑤，⑥，⑦では，事前調査で誤答した児童の内，事後調査で正答に変化した児童の割合が多いことがわかる．しかし，表2からは，図⑤に関しては，事前・事後とも正答した児童の数が最も多く、事後で解答が変化した児童の数が他の図の場合と比べて少ないこともわかる．

表3　事前・事後調査における解答の変化について

	図①	図②	図③	図④	図⑤	図⑥	図⑦
(1) 事前調査で誤答した児童の内, 事後調査で正答した児童の割合	0.67	0.23	0.19	0.68	0.71	0.93	0.79
(2) 事前調査で正答した児童の内, 事後調査で誤答した児童の割合	0.06	0.43	0.62	0.07	0.02	0.01	0.10

そこで，同じ児童の事前・事後調査における解答の変化があったといえるかどうかを調べるためにマクネマー検定を行った[注2)]．その結果，有意水準を5%としたとき，調査問題の図④（$\chi^2(1)=6.2500$，$p=0.0124$），図⑥（$\chi^2(1)=19.8621$，$p<0.001$）と図⑦（$\chi^2(1)=7.5208$，$p=0.0061$）において有意差が見られた．しかし，これら以外の図について有意差は見られなかった．このことから，図④,⑦については，児童が授業前より交差点の上下関係について注意深く見ることができるようになったと考えられる．また，図⑥についても立方体だと読み取ることができるようになることに効果があったと考えられる．これにより，本授業のような結び目を用いた学習活動は，調査問題のような立方体のフレームの図やそれに似た図から，立方体のフレームと見抜くことにある程度効果を示すことができた．しかしながら，図②，③では正答率が依然として低いため，立方体のフレーム図の読み取りには本授業実践ではまだ十分であるとはいえない．立方体のフレーム図は授業で扱った結び目と比べると交差点が2つあるだけでなく辺や頂点にも目がいくため，児童にとっては読み取りが困難ではないかと考えられた．

Ⅳ．まとめと今後の課題

授業実践では，結び目を多様な視点から観察することにより，視点が変わると空間図形が全く違う形に見えることがあることを児童に気付かせることができた．また，交差の上下に着目しながら結び目を動かしたり図に表したりしたことで，交差の上下関係を注意深く見る力を養うことができた．さらに，結び目の観察では，多くの児童が結び目を少しずつ動かして交差点付近の2本のひもの動きを何度も確かめていることが分かり，空間図形の動的イメージを形成していく過程の一端を見ることができた．これらのことから，結び目を教材として扱うことは，児童に空間図形の前後（上下）の位置関係を意識させることに対して有効であると考える．本実践で扱った結び目は交差点の数が多くとも1つしかなかったため，その1か所の交差点に着目して交差の上下をどのように図表現すればよいか，反対側から見るとそれがどのように見えるかを考える教材として，小学生にとって分かりやすく意義があったといえる．しかし，交差点の数が1つの結び目を扱うだけでは，調査問題のような立方体のフレーム図をすべて読み取ることにはまだ効果が十分とはいえないこともわかった．今後は，本実践をもとにして交差点の数を増やした結び目を用いて，ひもの位置関係に着目したり，それらを図表現したりするような授業実践による効果を検証していきたい．

引用・参考文献

1) C.C.アダムス著，金信泰造訳(1998)，結び目の数学，培風館.
2) 河内明夫(2015)，結び目の理論 (共立講座数学探検) ，共立出版.
3) Y.Handa and T.Mattman (2008), Knot Theory with Young Children, Mathematics Teaching incorporating Micromath, 211, November, 32-35.
4) 柳本朋子・宮崎萌恵・山本賢・金田良平・小山真佳(2009)，「結び目の数学」の教育について（2）－小学生を対象として－，大阪教育大学紀要第Ⅴ部門，第 58 巻第 1 号，pp. 18-27.
5) 河内明夫・柳本朋子編(2005)，「結び目の数学教育」への導入－小学生・中学生・高校生を対象として－，第 1 号.
6) 河内明夫・柳本朋子編(2007)，「結び目の数学教育」への導入－小学生・中学生・高校生を対象として－，第 2 号.
7) 河内明夫・柳本朋子編(2009)，「結び目の数学教育」への導入－小学生・中学生・高校生を対象として－，第 3 号.
8) 河内明夫・柳本朋子編(2014)，「結び目の数学教育」への導入－小学生・中学生・高校生を対象として－，第 4 号.
9) 河内明夫・柳本朋子編(2017)，「結び目の数学教育」への導入－小学生・中学生・高校生を対象として－，第 5 号.
10) T.Yanagimoto, A.Higashio, M.Koyama, H.Kinoshita & M.Miyazaki, Mathematical Knots as a Teaching Tool to Improve Spatial Awareness in Elementary School Pupils, The 14th International Congress on Mathematical Education Shanghai, 11-18th July 2021.
11) 文部科学省(2017)，小学校学習指導要領（平成 29 年告示）解説算数編,
12) S.ジーゲル著；藤本熙監訳(1983)，ノンパラメトリック統計学：行動科学のために，マグロウヒルブック.

注

1) 本論文で述べた調査内容と教育実践は参考文献 9)をもとに加筆・修正したものである.

2) マクネマー検定（McNemar Test）は、対応のある 2 値変数(1,0)について、すべての変数間で比率に差があるかどうかを検定するときに用いる。χ^2検定と似ているようにも思えるが，χ^2検定は「問題A が正答なら問題 B も正答しやすい」などの、2 つの変数の関連性の検定に用い，マクネマー検定は、「問題Aに正答し問題 B に誤答したものと、問題Aに誤答し問題 B に正答したもの」という変化を検定するときに用いるという点で異なるものである。本研究では，教育実践によって，事前と事後の正答率の変化があったかどうかを調べるために用いた.

たとえば，同じクラスの児童に対して授業前後の正答・誤答の数を右表のように表す.

		授業後		計
		正答	誤答	
授業前	正答	A	B	A+B
	誤答	C	D	C+D
計		A+C	B+D	N

帰無仮説 H_0：「母比率に差はない」。
対立仮説 H_1：「母比率に差がある」。

マクネマー検定では，授業の前後で回答が変化した部分 B,C に着目する.
$\frac{B+C}{2} > 5$)場合，自由度 1 の χ^2分布を利用して検定する.

統計検定量は次の式を用いる．　$\chi_0^2 = \dfrac{(\mathrm{B}-\mathrm{C})^2}{\mathrm{B}+\mathrm{C}}$

また，連続性の補正を行うときには次の式を用いる．　$\chi_0^2 = \dfrac{(|\mathrm{B}-\mathrm{C}|-1)}{\mathrm{B}+\mathrm{C}}$

例えば，調査問題図③の事前事後の正答・誤答の数（右表）をもとに計算してみる．連続性の補正を行う式を用いると以下のようになる．

事前＼事後	正	誤	合計
正	23	37	60
誤	24	103	127
合計	47	140	187

$$\chi_0^2 = \frac{(|37-24|-1)^2}{37+24} \fallingdotseq 2.3607$$

有意確率を $P = \mathrm{P_r}\{\chi^2 \geq \chi_0^2\}$ とする．

有意水準5%で検定を行うとすれば $\chi^2 = \mathrm{P_r}\{\chi^2 \geq 3.84\} = 0.05$ であるから，

$P = \mathrm{P_r}\{\chi^2 \geq 2.3607\} = 0.1244 > 0.05$ により，帰無仮説は棄却できない．つまり，事前事後で正答率の変化があったとはいえないといえる．