

第一 Chern 数・指標をめぐる

ふじ い じゅん いち
藤 井 淳 一

(大阪教育大学 教育協働学科 理数情報講座)

(2022 年 3 月 25 日 受付)

概要：第一 Chern 数という一見狭い範囲の一つの語句から始まって、ノーベル賞で注目された TKNN と呼ばれるトポロジカル不変数とのかかわりから爆発的に様々な方向に発展し、あっという間に「見えなく」なってしまった感があるぐらい多くの分野に拡がりを見せた。そこで、少しでも道しるべ的な解説を教育的な意味も込めて示したいと考えた。到底一つの論文ですべての解説を含むわけにはいかないので、全てに渡って触りだけの感は否めないが、自分なりに理屈をつけて配置する程度の事は辛うじて何とかなったように思われる。自らの関わりも含めて物語風に論じたい。

検索語：Chern 数・類・指標, index, K 理論, Bott 周期性, Uhlmann 幾何・数

はじめに

私が専門の作用素論で卒論で読んだのは Halmos の問題集の本で、特に分担したのはコンパクト作用素だった。特に不思議に思ったのは、Fredholm 作用素 F で、その核および余核が有限次元であり、その値域が閉であるようなもののことを言うが、特殊なコンパクト作用素であり、

$$\text{Ind} F = \dim \ker F - \text{codim} \text{ran} F = \dim \ker F - \dim \text{coker} F$$

というインデクス（指数）の定義のために上記条件が必要で、単に人為的な定義の感がして、正直これにどんな意味があるのかはさっぱりわからなかった。今から見れば、この少し前に、多様体の解析で Atiyah のフィールズ賞の業績の一つである K 理論の応用 Atiyah-Singer の指数理論として発展し、専門分野では、Brown-Douglas-Fillmore の所謂「BDF 理論」がもてはやされた直後の事だったのである。これらはさらに、作用素環的に非可換 K 理論へと発展し、その後大きな潮流となるもので、大学院進学を予定していたのでまさしく研究の基礎たりうる適切なテーマを与えていただいたのであるが、当人はその当時全くピンと来ていなかった。大学院に進学した時にも、助手として本学に来られた 故 竹鼻先生の学会発表のお手伝いを少々したことがあり、内容は記憶にないが、その発表も作用素環の K 理論関連の話だった。

結局私自身の研究として、その後この類のインデクスは殆ど使うことはなかった¹⁾ののだが、情報科学で量子コンピュータの数学的背景にかかわり、最近になって TQC（トポロジカル量子計算）に

¹⁾[20]でも触れたが、唯一の論文は、Jones と Pimsner-Popa の index に関するグラフ理論的な考察 [24]のみである。作用素環の知識があるので自力では思いつかないことであるが、中村先生に予想していただいた狙い通りの結果であった。本来なら acknowledgement を書くべきところではあるが、先生のゼミではそれは禁じられていたので書けなかった。

興味を持って研究し始めると、ようやく関連することになった。この分野はいろいろな数学概念、物理概念と関連するので、修士の学生のテーマに最適だと思って首を突っ込み始めたのだが、面白くて自分自身がはまってしまった。特に量子 Hall 効果（そこでトポロジカルと呼ばれるのはチャーン数がキーであることも目に触れていた）と関連することは、調べ始めた時からわかっていたのだが（例えば、Kitaev[32]）、ほかにも勉強しておくべきことが山ほどあってなかなか手が回らなかった。チャーンさんは漢字で陳省身と書き、カルタンの弟子で、本業の作用素論での「相対作用素エントロピー」[23]のファイバー幾何学的位置づけ[17, 18, 19]でお世話になった世界的なファイバー束的微分幾何のテキスト Kobayashi-Nomizu の著者の一人野水先生の師であることは別方面から知っていた。

関連分野が多いのは勉強にはなるが時間をかなり食ってしまう。すぐやれることはひと段落ついたので、そろそろやり始めるかと思ったときに、チャーン数に手を付けると、あまり基礎的な幾何学の本にない「複素多様体若しくは複素ファイバー束」がらみのコホモロジーの話が定義であるので、実空間のように絵で描けず分かった気にならない。さらにこの概念は K 理論にも発展しており、「整数値であることはなんと指数理論につながる」ことがわかってきた。実際、Atiyah-Singer 指数定理の一つの姿は、同類概念のチャーン指標を使って定義されている。これで最初のインデックスの話につながってしまった。なんと駆け出しのころに引かなかったことが、不勉強で情けない話であるが、退職の年齢になってやっとわかったのである。しかも調べていくうちに、数学と物理の密接な関係がここにもあったことがわかったし、私のやった狭い範囲の仕事にことごとく絡んでくることもわかった。今まで全く関係のないと思っていたことがつながりを持つので、勉強不足を痛感することになったが、一方で不思議な縁も感じた。

ここではまず、物理側のきっかけとなった甲元氏の仕事あたりから始めて、Chern 数や指標（第一に限ればほぼ同じ）の様々な姿やその発展を概観するのが本稿の目的である。細かい定義に触れることすらできないのは、この目的を鑑みて大目に見ていただきたい。

最初から実は index とかわかることは、実際甲元氏の描像が Dirac の monopole のそれであり、ズバリその数学的な枠組みと指数定理の関連は日本語の本も 1 冊ある程である [63]。

I. Chern 数との関連付け – 甲元真人氏の功績 –

トポロジカル量子現象で 2016 年度のノーベル賞を取った功績の大きな一つは TKNN 理論 [55] で名が通っており、筆頭の Thouless が賞をとっていて、この第一チャーン数は TKNN 数としても引用されることが多いので、てっきりこれを指摘した人は筆頭著者の Thouless さんと思い込んでいた（実際そのように書いてある文献があふれている）。しかしこの数学概念との関連は書かれておらず、実際これに着目したのは 2 番目の著者 K 氏で、しかも日本人の甲元真人さんであることを知った。一度日立で働いていたので少々年齢の高いボスドク（そのせいでいろいろ苦労されたいい）として Thouless のところにいた時、Thouless は、蝶のフラクタルの図で有名な Hofstadter の問題に興味をもって、量子 Hall 効果に目を向けていた。それで量子 Hall 効果において（後に）第一チャーン数となる指標の重要性に気付いて甲元が、最初に Thouless に相談した時に、大きく評価してもらえらるだろうと思っていたにもかかわらず「trivial」と見向きもされなかった。正にけんも

ほろろであり、甲元氏は量子 Hall 効果の見方が悪く研究に向いていないのかと落胆し、しばらくは別のことをされていたそうである。

それでその後知らないうちに世界的に有名でノーベル賞の核となる TKNN 論文 [55] が出されて、一応 2 番目の著者にしてもらったもののなんだか釈然としなかったそう。研究を主導していた実力者とはいえ、評価されている部分は Thouless の功績ではないだろうし、後から重要性に気付いたからこそ第 2 著者にしたのはないか。ご本人の解説は [35, 37] にあり、証拠の論文 [55], [34] (ご本人の重要な補足と解説) を比較すれば、そのあたりの事情は歴然である。TKNN 数とよばれ、[55] が引用されることがあってもそれには定数としか書いていなくて、ギャップもあったのでキチンと第一チャーン数とベリー位相と関連づけたはずの [34] は、あまり引用されないのはフェアではないと思われる (例えば、チャーン数の重要性に触れた TQC で代表的な [32] でさえ、100 近くの引用文献の中に [34] はなく、[49] もそうである。この点、誤った引用がかなり多い)。ただ、甲元氏に近い周りの人は知っていたようで、3 人しか同時受賞できないノーベル賞の第 4 の研究者ともいわれているそう。これは残念な話であるが、実は退職後 (!) になって、比較的若手研究者に送られることが多い仁科賞を「トポロジカル量子物性物理の創始」として 2017 年に受賞したのは、喜ばしい半面、遅すぎる評価という感が否めない。

ついでながらではあるが、専門の作用素論のテキストで、物理にも詳しい Barry Simon の本はよく描けていて読みやすいのでずいぶんお世話になったが、なんと甲元氏は彼から論文のクレームを 2 度も電話で受けたそう。それは主に数学と物理のすれ違いであったが、のちに自分主催のコンファレンスに招待するなど、その実力は認めていたようだ。参加者からも (TKNN の結果ではあるが) 絶賛されたそうで、わかっている人からはそう対応されるのだろう ([36])。実際、Simon は甲元 [34] より早く、TKNN [55] に対し、holonomy の観点からの別の数学的定式化を手掛けて発表している [50] ([49] にも解説があり、[55] になかった Berry Phase には着目している。後述するように、Simon のこの試みは意外な方向に発展することになるのだが …)。

そこで、[34] と、それを正当に評価している [41, 27, 38] によって、甲元自身の仕事を眺めてみよう (少し見やすいように改変しているが、頑張って調べてもわからない部分も多く書き違いがあるかもしれないことは、ここではどんな風なお仕事をされたかの方が主なのでご賢察の程)。物理に不慣れな私のような人間にとっては、それでも多少準備の解説が必要である。(磁場における) スピンは、2 次元のベクトルであってもそこでは表現しにくく、Bloch 球面 B の 3 次元座標で可視化するのが常識らしい (cf. [49, 2.2])。その全単射 S の対応は (左辺の単位ベクトルでは phase 係数の違いは同一視されていることに注意。それで第 1 係数が実数になった代表元が書かれている。)²⁾

$$\cos(\theta/2)|0\rangle + e^{i\varphi} \sin(\theta/2)|1\rangle \xrightarrow{S} (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta).$$

²⁾ この対応は状態ベクトル x でなく密度行列 xx^* とパウリ行列 $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ を基底と見るとわかりやすいかもしれない:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \\ e^{i\varphi} \sin \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \\ e^{i\varphi} \sin \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}^* &= \begin{pmatrix} \cos^2 \frac{\theta}{2} & -i\varphi \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \\ i\varphi \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} & \sin^2 \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + \cos \theta & (\cos \varphi - i \sin \varphi) \sin \theta \\ (\cos \varphi + i \sin \varphi) \sin \theta & 1 - \cos \theta \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} I_2 + \frac{1}{2} \left(\cos \theta \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \sin \theta \cos \varphi \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \sin \theta \sin \varphi \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{2} I_2 + \frac{1}{2} (\cos \theta \sigma_z + \sin \theta \cos \varphi \sigma_x + \sin \theta \sin \varphi \sigma_y). \end{aligned}$$

さてそれでは、本題に入る。問題となっている Hall 伝導率 (zero-temperature conductance) σ_{xy} の幾何学は、Dirac の monopole 束の構造とのアナロジーがあり、該当する電磁気の空間はトーラス上の主 $U(1)$ 束とみることができそうである (なぜこの束になるかは、[16] のプレゼン資料に数学的な解説があり、Dirac の枠組みの数学的解説は [31] にもある。 $U(1)$ は絶対値 1 の複素数全体であり、後に TQC などの phase に対応すると予想される)。(分子の繰り返しがあると想像して) 固体の格子に付随する「逆格子」の最小単位である Brillouin zone **BZ** ([3] の解説は分子のように立体的だが、ここでは 2 次元の話なので長方形領域になっていて、2 変数 k_1, k_2 で表す) で「Berry 接続」と呼ばれるベクトル場を考える (厳密には phase のずれがあるが) :

$$A(k_1, k_2) = \langle u_{k_1 k_2} | \nabla_k | u_{k_1 k_2} \rangle = \int_{r \in \text{Br}\Gamma S(\text{BZ})} u_{k_1 k_2}^* \nabla_k u_{k_1 k_2} d^2 r$$

(∇_k は成分が $\partial/\partial k_1, \partial/\partial k_2$ の行列で、 u は「Bloch 状態」と呼ばれる波動関数に当たる)。これは Bloch 球面上の仮想ゲージ変換の場と見れ、 u がファイバー束を構成するらしい。この時、 σ_{xy} の completely filled band ³⁾ α に対する値 σ_{xy}^α は「rot」を示す外積を使って、

$$\sigma_{xy}^\alpha = \frac{e^2}{h} \frac{1}{2\pi i} \int_{k=(k_1, k_2) \in \text{BZ}} [\nabla_k \times A(k_1, k_2)]_3 d^2 k$$

と書ける ($[\]_3$ は 3 つ目の座標で、Green-中野-久保公式と断熱極限から得られる)。この積分値が、Berry 曲率 $F = dA$ の $\frac{i}{2\pi}$ 倍の Chern 形式を積分した第一 Chern 数 (のマイナス) となり、 $\frac{e^2}{h}$ を掛けると σ_{xy}^α に等しくなることを示した。以上が [34] の主たる内容である。

ここで注意しているのは、局所的には問題はないが、大域的にはトーラスで 4 種類の Brillouin zone に分けて議論することが必要であり、[55] ではそのあたりが無頓着なので補足しておきたかったということであった ([37] などにもそのあたりが記述されているが、数学的に言えば、[55] のようにトーラス全域で Stokes の定理が適用可能だとすると、Hall 効果がなくなってしまうという結論になるので、重要な注意である。向きの問題があるので、球面でも 2 つの分割が必要なことは、[58] の解説が見やすい)。詳しく知りたい方はケンブリッジ大の有名な Tong 先生の講義録 [57] が公開されていて、まとまった記述になっていてわかりやすいが、残念ながらこの専門家でも [34] を引用していない (p.62 あたり)。

ということで、完全に [55] を補完している (というか此方が本筋) と思われる。物理的な側面から見ても後に確認するように射影作用素のフォーミュレーションが基本的らしい。この物理方面からは、[41] に詳しく、読みやすい。

II. Chern 関連の簡潔な定義

Chern 数や指標は指数理論と相まって拡張の議論は盛んになされているものの、もともとの定義を簡潔に述べたものがあまりなく、岩波の数学辞典も頼りないし、きちんと Chern 類、Chern 数、

³⁾ バンド理論はよくわからないがエネルギー分布を示し、連結成分「バンド」がいくつかできるそうである。粒子存在のための「フェルミ準位」が連結成分から完全に離れてギャップに入ってしまうと「絶縁体」になり、また各連結成分が埋まっているか空であれば連続変形不可能なため身動きが取れずやはり「絶縁体」になる。後者のうち、すべて埋まっている状態のことだと推察される。

Chern 指標の個別定義のみでなく、3 者（「形式」まで含めると 4 者）の相互関係を分かりやすく述べたものもあり見つからないので困っていた。そこで目にした Cornell 大の Zhang の講義録 [64] および東京大学 大学総合教育研究センターでの大栗 [48] の講義資料が最も簡潔だと思われるので、それらに沿って述べてみよう（以下の不変多項式係数による「類」の定義は、[43] によると、オリジナルと違って **Chern-Weil** 表示または構成と呼ぶらしい）。

構成幾何学的な詳細は省くが、リー群 G とそのリー環 \mathfrak{g} について、不変多項式⁴⁾ と呼ばれる行列式型の多項式と、その係数を

$$p(t) \equiv \det \left(I + t \frac{iA}{2\pi} \right) = I + tP_1(A) + \cdots + t^k P_k(A) \quad (A \in \mathfrak{g}) \quad (1)$$

とすると、

$$P_1(A) = \frac{i}{2\pi} \text{Tr} A, \dots, P_k(A) = \det \frac{i}{2\pi} A$$

となる。この時、Chern-Weil の定理によると、 $2k$ 実次元の境界のない向きづけ可能な多様体で、 k 次の不変多項式 P_k の積分 $\int_M P_k(F)$ は、接続の選択によらないので、それに依存しない固有の概念であることがわかる。そこで、 $\pi: E \rightarrow M$ をファイバーが \mathbb{C}^k となる複素ベクトル束としたとき、 k 次元の主束の接続形式 A についての曲率形式 $F = dA + A \wedge A$ を考え、 j 次の Chern 類 $c_j(E)$ （特に $j = 1$ も具体的に添えておく）を

$$c_j(E) = P_j(F), \quad \left(c_1(E) = \frac{i}{2\pi} \text{Tr} F \right)$$

で決める（これは実際には実係数の de Rham cohomology $H^{2j}(M)$ の代表元と見れる⁵⁾）: **Chern-Weil 準同型**。元の微分形式を Chern 形式、同値類を Chern 類と区別する場合もある）。これで基礎的な部分は大体想像でき、第一の場合はトレースがらみだということはわかる（ついでに言うと、最後の第 k 次は行列式がらみであるが、Euler 類に対応する cf. [26]）。

ここで少し苦言を呈したい部分であるが、(1) のように、母関数的に（ t に無関係な）係数として定義するのは問題ないが、 $t = 1$, $A = F$ として得られる

$$P(F) \equiv \det \left(I + \frac{iF}{2\pi} \right) = I + P_1(F) + \cdots + P_k(F) \quad (2)$$

は、全 Chern 類 $c(E) \equiv P(F)$ の定義にはなっていない、各 P_j は結果として関係は示しているものの、その定義には当然なっていない。にも関わらず補足もなしに (2) のみによって j 次 Chern 類 $P_j(F)$ を定義したと誤っている文献がしばしばあり、私自身もたまたま最初に運悪く当たった被害者で、最初 j 次 Chern 類の定義が何のことかわからなかった。いろいろ読むと分かったのだが、気を付けてほしいものである。

⁴⁾ 正確な定義は [44] などにあるが、不変性は G の随伴表現での不変性のことなので、 $P(gAg^{-1}) = P(A)$ より三角化できて、例として対角成分に固有値 a, b, c が見える三角行列で計算すると、 $p(X) = \det(1 + tX)$ として

$$p \begin{pmatrix} a & d & e \\ 0 & b & f \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1+ta & d & e \\ 0 & 1+tb & f \\ 0 & 0 & 1+tc \end{pmatrix} = (1+ta)(1+tb)(1+tc) = 1 + (a+b+c)t + (ab+bc+ca)t^2 + abct^3$$

である。

⁵⁾ M の微分構造で、 j 次の微分形式 ω は $d\omega = 0$ の時「閉」というが、それらの同値関係を $\omega_1 - \omega_2 = d\eta$ となる $j-1$ 次微分形式の存在で決めた時の商空間の群の事。

j 次の Chern 数 $C_j(E)$ は、Chern 類・形式の積分値

$$C_j(E) = \int_M c_j(E)$$

で決め、この値は整数となることがわかる。

一方 j 次の Chern 指標 $ch_j(E)$ は、de Rahm cohomology の同値類として

$$ch_j(E) = \frac{1}{j!} \text{Tr} \left[\left(\frac{i\mathcal{F}}{2\pi} \right)^j \right], \quad \left(ch_1(E) = \frac{i}{2\pi} \text{Tr} [\mathcal{F}] \right)$$

で与えられ、以下の関係があることがわかる（特に $j = 1$ は同じ）：

$$ch_0(E) = n, c_0(E) = 1, ch_1(E) = c_1(E), ch_2(E) = \frac{1}{2} c_1(E)^2 - c_2(E).$$

以降、これらの関連を念頭に、いずれかの形で述べる。因みに [47] では、Chern 類を以下のように公理化している：詳しい定義は述べないが、 $\text{Vect}(M)$ を M 上の複素ベクトル束の同型類全体とするとき、 j 次の Chern 類 $c_j : \text{Vect}(M) \rightarrow H^{2j}(M; \mathbb{Z})$ は以下の公理系を満たす関数 ($E \in \text{Vect}(M)$)：

自明項 $c_0(E) = 1$, $k > \text{rank} E$ のとき、 $c_k(E) = 0$.

関手性 $f : N \rightarrow M$ のとき、引き戻し束 f^*E において、 $c_j(f^*E) = f^*(c_j(E))$.

Whitney 和公式 $c_k(E_1 \oplus E_2) = \sum_{i+j=k} c_i(E_1) c_j(E_2)$.

正規性 普遍線束 $\gamma^1 \rightarrow \mathbb{CP}^\infty$ ⁶⁾ において、 $c_1(\gamma^1)$ は、 $H^2(\mathbb{CP}^\infty; \mathbb{Z})$ の標準的な 2 次の生成元（つまり、この H^2 は位数 2 の元 x について $\mathbb{Z}[x]$ と同型）.

実際「第一」の場合にどのように同じであるのかは、親切に書いてあるものは少ないので、あえて 1 つの章を設けたということである。ただし、もはやオリジナルからは時代が進みすぎているが、簡潔な形でまとめることは、今後の発展を予感させ、（長ったらしい定義が好きな人もいるだろうが、せppかち人間には耐えがたいので）個人的には大切だと思われる。

最後に少し寄り道をするが、基本複素ベクトル束の話として Chern 類 c_j があり、実ベクトル束の似た概念に Stiefel-Whitney 類 w_j があるが、 n 次元複素ベクトル束は $2n$ 次元の実ベクトル束とみることができ、 w_{2j} は c_j に対応し、 $w_{2j+1} = 0$ となることがわかる（詳細は Hatcher[26] 参照）。 w_j はもちろん Stiefel 多様体から生まれた概念で、典型的な主 $\mathcal{O}(n)$ 束 $\text{St}_k(\mathbb{C}^n) \rightarrow \text{Gr}_k(\mathbb{C}^n)$ があるので、Grassmann 多様体においても有効に働く（再度、注 6) 参照）。これは部分空間の多様体であるが、作用素論的には同ランクの射影作用素の空間でもあり、作用素平均で双方扱ったことがあるのも何かの縁だろう [22]。この Grassmann 多様体の接続および構成要素の射影作用素がさらなる発展をもたらすのである。

⁶⁾ \mathbb{CP}^∞ は、有限次元の（帰納）極限として得られる無限次元複素射影空間の事であるが、 $BU(1)$ と表記される。この表記は、Steenrod の分類定理によって、（位相）群 G （ここではユニタリ群 $U(1)$ ）に対し分類空間 BG とその普遍 G 束 EG が、 $BG = EG/G$ として CW 複体の文脈で存在が示されることによる。普遍性は任意空間 X について、その引き戻しで作られる $\rho_{EG} : [X, BG] \equiv \text{Hom}(X, BG)/\text{homotopic} \rightarrow \text{Prin}_G(X)$ の対応 $f \mapsto f^*X$ が全単射であること（ $\text{Prin}_G(X)$ は主 G 束の同型類全体）。詳しいことは参考文献に当たってほしいが、[47] など是不親切で読みにくいかもしれないので、個人的に例示も多くてわかりやすかった Cohen の講義録 [11] を推奨する。線束は特別なものでこれの良いが、一般的な k 次元の分類空間 $BU(k)$ は、複素 Grassmann 多様体 $\text{Gr}_k(\mathbb{C}^n) = U(n)/U(k) \times U(n-k)$ とそのファイバー空間としての複素 Stiefel 多様体 $\text{St}_k(\mathbb{C}^n) = U(n)/U(n-k)$ の $n \rightarrow \infty$ の帰納極限を取ったものが普遍空間となり、 $\text{Gr}_k(\mathbb{C}^\infty)$ が分類空間 $BU(k)$ を与える。実際、極限を取る前の射影空間との関係は $\text{Gr}_1(\mathbb{C}^n) \cong \mathbb{CP}^{n-1}$ である。

III. 非可換トーラスまたは回転代数

Connes の非可換幾何学は有名なのであまり触れないが（また少し先取りにはなるものの）前章とのつながりで、初期の非可換トーラスの話をしておく。実際にはこれは、I 章で述べた甲元が描いた 2 次元磁場の数学モデルになっているからである。ここで引用する [12] は、まず一般的な C^* 力学系から性質の良い (C^∞ な) 稠密代数を定義し、その上の有限射影加群を考えて、それを多様体とみて Grassmann connection を考え、それに基づいて Chern 数や指標を、この代数の射影作用素（などの作用素）に適用していることである。ここから本格的に Connes-Chern 指標が展開される出発点になっているが、[12] では特殊なケースとして非可換トーラスについて述べている⁷⁾。さらに、Index との明確な関係（定理番号は本論文では 11、プレブリでは 10）も指摘しているのである。詳しい解説は [15] にもあり、 $\theta \in [0, 1]$ で無理数でない場合も含めているので、こちらに沿って述べる（作用素環的には無理数でないと、単に有限の議論になるから避けているだけであろう。もちろん精力的な Connes はさらなる発展を遂げており、cyclic cohomology から、相対的な Chern 指標なども通過しているが、メモワール [40] を挙げておくにとどめておく。Fredholm module という拡張もあるが、こちらは [25] 参照）。

定義自体は単純で、角度パラメータ $\theta \in [0, 1]$ について交換関係 $VU = e^{2\pi i \theta} UV$ を満たす 2 つのユニタリで生成される C^* -環 \mathcal{A}_θ を考えると、これは、接合積 $C(S^1) \rtimes \mathbb{Z}$ とみなすことができ、電磁場のモデルにもなっている。これを非可換トーラスとか 2-トーラスとか回転代数と呼ぶ。

その中の性質の良い稠密代数 $\mathcal{A}_\theta^\infty$ を定義するために、次の条件を満たす Schwartz 列 $\{a_{m,n}\}$ （その全体を $\mathcal{S}(\mathbb{Z}^2)$ とかく。1 変数でも同様に決める）を考える：

$$\{a_{m,n}\} \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}^2) \iff \sup_{m,n \in \mathbb{Z}} (1 + m^2 + n^2)^k |a_{m,n}| < \infty \quad (\forall k \in \mathbb{N}).$$

この時、

$$\mathcal{A}_\theta^\infty = \left\{ \sum_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2} a_{m,n} U^m V^n \mid \{a_{m,n}\} \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}^2) \right\}$$

と定義する。ここで、円周上の関数 $f \in C^\infty(S^1)$ は

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n e^{2\pi i n x} \quad (\{f_n\} \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}))$$

と Fourier 展開できるので、functional calculus を

$$f(V) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n V^n$$

としよう。そのとき、 $\mathcal{A}_\theta^\infty$ の元の一般形を

$$b = \sum_{\text{有限個の } m \in \mathbb{Z}} U^m b_m(V) \quad (b_m \in C^\infty(S^1))$$

⁷⁾ 久しぶりのフランス語の論文で読めるか不安であったが、プレブリの方はなぜか英語で安心した。作用素環的（というより指数理論的）には Chern 指標の方がしっくりくるのか、以降の発展はすべて指標の方になっている。実際甲元描像のモデルなので、プレブリでは第一 Chern 数 C_1 も登場するのであるが、用語としては一切そう呼んでいない。Chern 類は両方触れている。

表わして、標準トレース τ を、 S^1 を $[0, 1]$ パラメータで表して、

$$\tau(b) = b_{0,0} = \int_0^1 b_0(x) dx$$

とする。上記の接合積型だと

$$(Uf)(x) = f(x + \theta), \quad (Vf)(x) = e^{2\pi i x} f(x)$$

という解釈となる。トーラスの経線・緯線方向の 2 つに対応していると見れる。接ベクトルに当たる A_θ も δ_1, δ_2 と 2 方向あれば Grassmann connection を定義したことになる：

$$\delta_1 U = 2\pi i U, \quad \delta_1 V = 0, \quad \delta_2 U = 0, \quad \delta_2 V = 2\pi i V.$$

これで（非有界の場合があるが、そうでないような） A_θ の射影作用素 P について、第一 Chern 数は

$$C_1(P) = \frac{1}{2\pi i} \tau \left(P(\delta_1 P \delta_2 P - \delta_2 P \delta_1 P) \right)$$

で定めることができる。この括弧積的な差の部分は、I 章の久保公式を使って出した外積の第 3 成分の形に対応していることが見てとれるだろう。実際 [7, Theo.1] では、フェルミ射影 P について久保公式（Kubo-Chern formula）をこの形に表現している： Ω をコンパクト空間、 \mathcal{B} を磁場、群 G の作用を考え、 $H = H^*$ を C^* -環 $C^*(\Omega \times G, \mathcal{B})$ のハミルトニアンとする。もう少し細かい条件が必要であるが、 P_F をハミルトニアン H のフェルミ準位より小さいエネルギーの固有空間に対する射影作用素とすると、第一 Chern 指標 Ch （および Hall 伝導率 σ_H ）は、

$$\sigma_H = \frac{e^2}{h} \text{Ch}(P_F) = \frac{2\pi i e^2}{h} \mathcal{T} (P_F(\partial_1 P_F \partial_2 P_F - \partial_2 P_F \partial_1 P_F))$$

（ \mathcal{T} は Ω 上の G 不変なエルゴード確率測度についての単位体積で標準化されたトレース）となる。

同様に Kitaev[32, (54)] も、自身の蜂の巣モデルでの 第一 spectral Chern number ν を、負のエネルギーのフェルミモードへの射影作用素 \tilde{P} によって定めている（この描像は B.Simon らの homotopy 的な考察 [6] の中で定義されたもの）：

$$\nu = \frac{1}{2\pi i} \int \text{Tr}(\tilde{P} d\tilde{P} \wedge d\tilde{P}) = \frac{1}{2\pi i} \int \text{Tr} \left(\tilde{P} \left(\frac{\partial \tilde{P}}{\partial q_x} \frac{\partial \tilde{P}}{\partial q_y} - \frac{\partial \tilde{P}}{\partial q_y} \frac{\partial \tilde{P}}{\partial q_x} \right) \right) dq_x dq_y.$$

[41] の感想は年代的に後付けかもしれないが、久保公式からその兆候はあったので射影作用素表現が最もシンプルかつ拡張性が高いのは間違いないだろう。

IV. K理論と Chern 指標・index

K理論は数学先行で研究されたものであるが、これがどんどん物理に応用されている。今回の事例（および次章の話）もそうであるが、それ以外にも例えば、超弦理論の D-brane（弦の端が存在しうる場所）の話は杉本さん [53] によれば、Witten の解釈が秀逸で次のような感想を述べておられる：

実は安定な D-brane の配位を分類しようとするとても自然に (位相的な) K 理論に導かれるのです。K 群の定義そのものに直接物理的な解釈が与えられるので、これを用いると、僕のような数学の素養のない物理屋にも直観的に K 理論の本が読めるようになります。そうした目で昔の K 理論の教科書を眺めてみると、D-brane が導入されるよりもずっと以前に書かれた本であるにも関わらず、D-brane のことがたくさん書かれていることに驚きます。

今回の話とは違う分野なので、詳しくは [53] を見てほしいが、今まで (これも数学先行であるが) コホモロジー群で分類されてきたものの、それでは不十分で K 理論による予言が正しいこともわかり、物理の理論としても再構築が求められるとの感想を述べている。

ここでは、簡単に K 理論を導入して index と Chern 指標の関連の話をしておく。読みやすい日本語の解説として、足立 [1] を挙げてそれに基づくが、詳しくは [44, 47, 63] などを参照のこと (このあたりの初期段階の Connes 関連の記述は [54] が見やすい)。これらの資料には甲元描像の拡張として出てくる Dirac 作用素が、必ず顔を出している。これは楕円作用素という側面を持ち、その結果 Fredholm になっているからである。したがって、index が定義でき、その Atiyah-Singer の指数定理は、ここでは詳しい定義の前に目標として 2 種類挙げておくが、双方 Chern 指標が関わっている: 2 つの複素ベクトル束 E, F を持つ smooth な閉多様体 M において、 $D: C^\infty(E) \rightarrow C^\infty(F)$ が楕円作用素ならば、

$$\text{指数定理 1.} \quad \int_M \text{ch}(D) \text{Td}(M) = \dim \ker D - \dim(\Gamma^\infty(F)/\text{Im} D) = \text{index} D.$$

$$\text{指数定理 2.} \quad \text{index} D = (-1)(\text{ch}(\sigma(D)) \text{Td}(TM \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C})[TM].$$

ここで、Todd 類 Td は以下のように定める: Chern 類を Chern-Weil 式に行列式的に定義したが、たとえば固有値 x_1, \dots, x_k を持つ k 次三角行列 A については、 $I + tA$ の固有値も $1 + tx_j$ となるので、

$$\det(I + tA) = \prod_j (1 + tx_j), \quad \text{特に、} \quad \det(I + A) = \prod_j (1 + x_j)$$

と因数分解できる。これと同じように Chern root と呼ばれる $X_i \in H^2(M; \mathbb{Z})$ で全 Chern 類を

$$c(E) = \prod_j (1 + X_j)$$

と因数分解するとき、全 Chern 指標と Todd 類は

$$\text{ch}(E) = \sum_j e^{X_j}, \quad \text{Td}(E) = \prod_j \frac{X_j}{1 - e^{X_j}}$$

でも定義される (これもいきなり X_j で因数分解といわれても何のことかわかりにくいだろう)。 TM は M の接ベクトル束で、 $\sigma(D)$ は、K 理論でいう D の「仮想バンドル」であり、後述する。

それで、もうすでにかなり先取りして使っていて (分類空間の考えは K 理論から来ているので) 今更ながらではあるが、触れずにごまかすのはそろそろ限界なので K 理論について簡単に触れる (いろいろ参考にしたが [51] の記述が実用的であるので位相的な話に限る)。

X をコンパクトハウスドルフ空間とすると、前述の同型類全体 $\text{Vect}(X)$ は Whitney 和を和とし、テンソル積を積とする可換半環になっている。そこで、自然数のペアからの整数構成の拡張としての「差」を定義して可換環 $K^0(X) = K(X)$ を作ったのが Grothendieck 群である (cf. [21])。

元の要素も差の同値類としてファイバー的に対応するので、この要素が仮想バンドルと呼ばれている。作用素環的には、[8, Prop.17.5.5]にあるように、 B が自明な \mathbb{Z}_2 -grading しか持たない C^* -環の時、コンパクト作用素全体 $\mathcal{C} \subset B$ を使って、⁸⁾

$$K^0(B) \cong \{T \in M^s(B) | TT^* - 1, T^*T - 1 \in X \otimes \mathcal{C}\} / \sim$$

となる（同値関係は、ユニタリ同値を除いてホモトピックとする。安定掛け算環 $M^s(B)$ は $B \otimes \mathcal{C}$ にかけても外に出ない作用素全体。実際には右辺は Kasparov 的な KK であるがここでは触れない）。この見方は [53] で、次の $K^1(B)$ もふくめて「D-brane 上のタキオン場」での物理的な意味付けができるので、著者が冒頭のように驚くのも無理はない。

さらに、可換環 R について K^1 は、 R 成分の n 次正則行列全体 $\mathcal{GL}(n, R)$ の帰納極限 $\mathcal{GL}(R)$ を取り、

$$K^1(R) = \mathcal{GL}(R) / [\mathcal{GL}(R), \mathcal{GL}(R)]$$

（ただし、 $[A, A]$ は A の交換子群）となり、作用素環的には

$$K^1(B) \cong \{T \in M^s(B) | T = T^*, T^2 - 1 \in X \otimes \mathcal{C}\} / \sim$$

になる。さらに K^2, K^3 と定義されるが、複素 Clifford 代数の周期性（森田同値でもある）より、この 2 つに帰着される周期性（Bott 周期）がわかるので、複素系ではこの 2 つのみでよい（ホモトピー群は $\mathbb{Z}, 0$ ）。

実空間でも、実 Clifford 代数同様、周期性は 8 となる。ホモトピー群（元論文 [5] では A_j に対応（後述）。ただし番号が一つずれる）で書くと Bott 周期性は以下ようになる ⁹⁾：

j	$8n$	$8n+1$	$8n+2$	$8n+3$	$8n+4$	$8n+5$	$8n+6$	$8n+7$
$\pi_j(\mathcal{O})$	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_2	0	\mathbb{Z}	0	0	0	\mathbb{Z}

である。ここで、Clifford 代数と K 群との関係が気になるかもしれないが、詳しくは Karoubi の手法の紹介として [2, 279–282] にあり¹⁰⁾、実例は [33] にある。

⁸⁾ これに関連して、Fedosov 公式と呼ばれる物がある [7]: $F \in B(\mathcal{H})$ が、或る $p \geq 1$ に対し、 $1 - F^*F, 1 - FF^* \in L^p(\mathcal{H})$ ならば、 F は Fredholm で、任意の $n \geq p$ について、

$$\text{Ind}(F) = \text{Tr}(1 - F^*F)^n - \text{Tr}(1 - FF^*)^n.$$

⁹⁾ この周期表では「きらきら星」の替え歌があるそうで、zero を 2 音に分けて歌ったら A メロに合いそうである。授業中にウィルスソフト作成という伝説を残し、のちに対ウィルスのセキュリティに貢献した、Fred Cohen も歌っていたそうだ：「♪ zee two, zee two, zero, zee, zero, zero, zero, zee」

http://pantodon.jp/index.rb?body=Bott_periodicity

¹⁰⁾ 大筋としては、対称 2 次形式 Q を持つベクトル空間のテンソル代数を考えて $Q(x) = x \otimes x$ となるよう同値関係で同一視したものが Clifford 代数 $C(Q)$ で（たとえば $ix \otimes ix = -x \otimes x$ になることもあって）同一視後の 2 次形式は正負 (q 個と p 個) の部分に分けることができ、 $C = C^{p,q}(Q)$ とあらわす。ここで、 $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ or \mathbb{C} とし、コンパクト群 X 上の \mathbb{F} ベクトル束で各ファイバーが、 C -加群で作用が連続なとき Clifford 加群束という。この中で、コンパクト対 (X, A) について、(A での制限が) 同型な次数付き加群束と同型合わせて 4 つ組の空間を考えて、その間の同型類が作る加法半群ができるが、ホモトピックなものを同一視し、 $(E, E, 1, 1)$ の対象を 0 とみなし再び加法的半群が得られるが、実際にはアーベル群になっていて、 $K_{\mathbb{F}}^{p,q}(X, A)$ と表わす。これは実際には K 群 $K_{\mathbb{F}}^{p-q}(X, A)$ と同型になるので Clifford 代数が K 理論に應用可能となる。ついでながら、番号のずれは、Quillen らの定理における分類空間よるもの（cf. [29]）：

$$\pi_j(\mathcal{GL}(A_*)) \cong \pi_{j+1}(B\mathcal{GL}(A_*)) \cong K_{j+1}(A).$$

物理的にはこの代数上で、スピノルや楕円作用素としての Dirac 作用素を導入して、インデックスとつながるが、触れるだけにとどめておく。

また、K-homology 系列 K_j も定義されるが、 $K_j \cong K^{n-j}$ がわかるので、上記で十分だろう。さらに Chern 指標を写像と見ると、

$$\begin{aligned} K^0(X) \otimes \mathbb{Q} &\cong \bigoplus_{j=2n} H_i(X; \mathbb{Q}), & K^1(X) \otimes \mathbb{Q} &\cong \bigoplus_{j=2n+1} H_i(X; \mathbb{Q}), \\ K_0(X) \otimes \mathbb{Q} &\cong \bigoplus_{j=2n} H^i(X; \mathbb{Q}), & K_1(X) \otimes \mathbb{Q} &\cong \bigoplus_{j=2n+1} H^i(X; \mathbb{Q}) \end{aligned}$$

と、有理係数の (コ) ホモロジーとも対応が付き、従来のもとの関連が付く、非常に美しくかつ有用な理論である。最後に、かなり複雑な設定なので触れるだけにすが、Varshovi[62] が、最近非可換な設定で 3 種類の Chern 指標を導入し、積分すれば (つまりおそらく Chern 数にすると) すべて等しくなるという結果を得て、Index との関連も論じているので、報告のみしておく。

V. K理論から物理へ

ここでは、物理的なものは主に [46] によって解説する (といっても理論的な考察は Kitaev[33] によっている。より詳しい講義録としては Moore[45] のものがある)。Chern 数というトポロジカルな数が注目されて以来、トポロジカル絶縁体のみでなく、超電導においてもパラレルな議論ができ、トポロジカル現象が注目されている。統一的な考察として「対称性」をもとに、10 種の AZ (Altland-Zirnbauer) 対称類が、相互作用のないフェルミオン系のハミルトニアンで定着しているが、それが精密化してきて、5 つの対称類でトポロジカルな現象が起こりうることが分かってきた。そのうち、K 理論的に Clifford 代数で分類した Kitaev の仕事が注目されている。実はこの 10 種類というのが、前章の \mathbb{C} 対称 2 種類、 \mathbb{R} 対称 8 種類を足したものである。その対応についてみよう。Clifford 代数については、数学的な定義は注 10) に載せておいたが、Bott 周期性に関連する場合は以下のような表になる (M_n は、 n 次行列環):

複素代数			実代数								
p	0	1	q	0	1	2	3	4	5	6	7
$C^p = C^{p,0}$	\mathbb{C}	$\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$	$C^{0,q}$	\mathbb{R}	$\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$	$M_2(\mathbb{R})$	$M_2(\mathbb{C})$	$M_2(\mathbb{H})$	$M_2(\mathbb{H}) \oplus M_2(\mathbb{H})$	$M_4(\mathbb{H})$	$M_8(\mathbb{C})$

これは、後述するように物理的な設定の表で、Clifford 代数も Q から構成せず、物理的なパラメータから作られた交換関係を伴う生成元からの構成である。一方、Atiyah-Bott-Shapiro[5] では、もっと数学的にシンプルな負の 2 次形式 $Q_j(x, x) = -\sum_j x_j^2$ で作られる j 次元空間上の Clifford 代数 $C_j^- = C(Q_j)$ (同様に $C_j^+ = C(-Q_j)$) を考えて、周期性を追究している:

j	1	2	3	4	5	6	7	8
C_j^-	\mathbb{C}	\mathbb{H}	$\mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$	$M_2(\mathbb{H})$	$M_4(\mathbb{C})$	$M_8(\mathbb{R})$	$M_8(\mathbb{R}) \oplus M_8(\mathbb{R})$	$M_{16}(\mathbb{R})$
C_j^+	$\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$	$M_2(\mathbb{R})$	$M_2(\mathbb{C})$	$M_2(\mathbb{H})$	$M_2(\mathbb{H}) \oplus M_2(\mathbb{H})$	$M_4(\mathbb{H})$	$M_8(\mathbb{C})$	$M_{16}(\mathbb{R})$

ここで、 $j = 1, 2, \dots, 8$ では包含関係が成り立つので各包含写像 i に対し、module の射 i^* は逆向きになるので、その余核を A_k とすると、注 9) の歌詞の表が出てくる:

j	1	2	3	4	5	6	7	8
C_j^-	\mathbb{C}	\mathbb{H}	$\mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$	$M_2(\mathbb{H})$	$M_4(\mathbb{C})$	$M_8(\mathbb{R})$	$M_8(\mathbb{R}) \oplus M_8(\mathbb{R})$	$M_{16}(\mathbb{R})$
A_j	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_2	0	\mathbb{Z}	0	0	0	\mathbb{Z}

\mathbb{Z} などの値は想像通り第一 Chern 数である。また、複素型は $C_j \otimes \mathbb{C}$ のようにすれば、同様に周期 2 で $0, \mathbb{Z}$ のみが繰り返される。このように 0 でない 5 つの部分がトポロジカルな性質を持つことが示唆されている。

このようなシンプルな考察とは異なり、地道に物理学的追究をしてあるのが、[33, 46] であるが、分類空間の捉え方のみ有限でとらえているので、普遍空間とする数学的な形で述べてある [45] の部分に差し替えつつ眺める: 似た記号が紛らわしいので、交換子積 $[\]$ 、反交換子積 $\{ \ }$ を太くして

$$[A, B] = AB - BA, \quad \{A, B\} = AB + BA$$

としておく。上記の表は、 d 次元の Dirac Hamiltonian $H = \sum_{j=1}^d k_j \alpha_j + m \beta_j$ のデータを使って出てきている。 $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ はガンマ行列と呼ばれ、 $\{\alpha_i, \alpha_j\} = 2\delta_{ij}$ を満たし、 $m\beta$ は Dirac 質量項で m はギャップの大きさを表し、 β は $\beta^2 = 1$, $\{\beta, \alpha_j\} = 0$ を満たすものである。ここで分類基準として時間反転対称 T , 電子正孔対称 C , カイラル対称 Γ の各演算子について見分ける。各交換関係は、虚数単位作用素 J を加えて

$$[T, \beta] = \{T, \alpha\} = \{C, \beta\} = [C, \alpha] = \{\Gamma, \beta\} = \{\Gamma, \alpha\} = 0$$

$$T^2 = C^2 = \pm 1, \quad [T, C] = 0, \quad \Gamma^2 = 1$$

$$\{T, J\} = \{C, J\} = [\Gamma, J] = [\alpha, J] = [\beta, J] = 0$$

対称類の分類は物理的には AZ であろうが、この分類記号自体は実際には Cartan が対称空間で分類したときの物であり、それに従って以下のようにクリフォード代数が割り当てられる (セミコロンで (p 部分); (q 部分) の生成元を表わす。上 2 つは p のみ):

対称類	Clifford 代数の生成元	T	C	Γ	拡大問題	分類空間
A	$C^{d+1} = \{\beta, \alpha\}$	0	0	0	$C^d \rightarrow C^{d+1}$	$B^0 \equiv Gr(\mathbb{C}^\infty) \times \mathbb{Z} = (U/(U \times U)) \times \mathbb{Z}$
$AIII$	$C^{d+2} = \{\beta, \Gamma, \alpha\}$	0	0	1	$C^{d+1} \rightarrow C^{d+2}$	$B^1 \equiv U$
AI	$C^{1,d+2} = \{J, \beta; T, TJ, \alpha\}$	+1	0	0	$C^{0,d+2} \rightarrow C^{1,d+2}$	$B^{0,0} \equiv Gr(\mathbb{R}^\infty) \times \mathbb{Z} = (O/(O \times O)) \times \mathbb{Z}$
BDI	$C^{d+1,3} = \{J\alpha, TCJ; C, CJ, \beta\}$	+1	+1	0	$C^{d+1,2} \rightarrow C^{d+1,3}$	$B^{0,1} \equiv O$
D	$C^{d,3} = \{J\alpha; C, CJ, \beta\}$	0	+1	0	$C^{d,2} \rightarrow C^{d,3}$	$B^{0,2} \equiv O/U$
$DIII$	$C^{d,4} = \{J\alpha; C, CJ, TCJ, \beta\}$	-1	+1	1	$C^{d,3} \rightarrow C^{d,4}$	$B^{0,3} \equiv U/Sp$
AII	$C^{3,d} = \{J\beta, T, TJ, \alpha\}$	-1	0	0	$C^{d+3,0} \rightarrow C^{d+3,1}$	$B^{0,4} \equiv (Sp/(Sp \times Sp)) \times \mathbb{Z}$
CII	$C^{d+3,1} = \{J\alpha, C, CJ, TCJ, \beta\}$	-1	-1	1	$C^{2,d} \rightarrow C^{3,d}$	$B^{0,5} \equiv Sp$
C	$C^{d+2,1} = \{J\alpha, C, CJ, \beta\}$	0	-1	0	$C^{d+2,0} \rightarrow C^{d+2,1}$	$B^{0,6} \equiv Sp/U$
CI	$C^{d+2,2} = \{J\alpha, C, CJ, TCJ, \beta\}$	+1	-1	1	$C^{d+2,1} \rightarrow C^{d+2,2}$	$B^{0,7} \equiv U/O$

拡大問題は、生成元の中で β にかかわるものを落として元の代数との関係を見る。すると、K 理論や Chern 指標などを使うと以下の関係が出るので、対応する分類空間 B が次の関係 (K 理論でわかる同型性を使うと下記の対応で尽くせる) で判明する:

$$C^p \rightarrow C^{p+1}: B^p, \quad C^{p,q} \rightarrow C^{p,q+1}: B^{0,q-p}.$$

これがわかれば、既にホモトピー群が知られているので番号一つずらせば、注 9) の歌詞の結果が得られる。

上記の対応は、注 10) の中の同型性 $K_{\mathbb{F}}^{p,q}(X, A) \cong K_{\mathbb{F}}^{p-q}(X, A)$ とパラレルであるが、そちらの方法も粗筋を聴くだけでも複雑な道のりである。[45] では、Fredholm 作用素空間 \mathcal{F}_k として求めているが、すっきりと整理されていて可視的な理論展開をしている。これらの分類空間はすべて「対

称空間」なので、等質空間として「商空間」になっている。そこで、Clifford 代数 $C^{2d}, C^{0,2d}$ に関して下記の結果になるような減少列 G_k を $r = 2^{d-1}$ として導入し、隣との商空間が対称空間になるものを作った：

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8
G_k	$O(16r)$	$U(r)$	$Sp(4r)$	$Sp(2r) \times Sp(2r)$	$Sp(2r)$	$U(2r)$	$O(2r)$	$O(r) \times O(r)$	$O(r)$

すると対称空間 G_{k-2}/G_{k-1} から \mathcal{F}_k が得られ、帰納極限を取って分類空間が得られる。

以上のように粗筋だけでも長くかかったが、結論として自明でないホモトピー群が出る処にトポロジカルな現象が出るのだから、第一 Chern 数が関連する \mathbb{Z} のもの以外に、 \mathbb{Z}_2 値のものがあることが示唆される。特に時間反転対称性のあるトポロジカル絶縁体の現象は、通常の Chern 数ではすべて 0 になって区別がつかなくなるので、 \mathbb{Z}_2 トポロジカル不変量 ν が基本で、 $\nu = 1$ の場合がトポロジカル絶縁体となるそうである。定義の準備として Pfaffian Pf は $2k$ 次の（実）交代行列 $X = (x_{ij})$ に対し

$$\text{Pf}(X) = \frac{1}{2^k k!} \sum_{\sigma \in S_{2k}} x_{\sigma(1)\sigma(2)} \cdots x_{\sigma(2k-1)\sigma(2k)}$$

と定義され、 $\det X = \text{Pf}(X)^2 \geq 0$ となるので、 $\sqrt{\det X}$ と $\text{Pf}(X)$ は符号 \pm の差のみであるから、0,1 に直すように、 \mathbb{Z}_2 -Chern 数 ν は、時間反転対称運動量 Λ_j と w 行列の成分で

$$(-1)^\nu = \prod_j \frac{\text{Pf}(w(\Lambda_j))}{\sqrt{\det w(\Lambda_j)}}$$

と定義されている ([4] 参照)。

VI. Uhlmann の拡張

実は個人的な関わりであるが、作用素平均としての幾何平均の path を考えて、Uhlmann の相対エントロピーに倣って「相対作用素エントロピー」を導入した ([23]) ところ、南米の数学者から「その path は実際には正作用素全体のなす多様体における測地線であり、その初期速度・方向性としての微分係数が相対作用素エントロピーである」と指摘を受けた。彼らは Corach-Porta-Recht を中心とするグループで、一連のファイバー束的幾何学的考察を C^* -環上で研究をしていたが、彼らの独壇場なので「CPR 幾何学」と呼んだ。これがきっかけで Kobayashi-Nomizu のテキストで幾何学的な基礎を学び、それらの発展について述べた ([17, 18, 19]) が、ほかにこの方向の研究者がほとんどいなくて（何度か学会発表して、日本数学会でも慶応大で特別講演までしたが、ほとんど興味を持ってもらえなかったようで）、彼らの日本代理店みたいな位置づけになっていた。

今回、甲元さんのことを知っていろいろ調べているうちに、実は TKNN に触発されて B.Simon が holonomy 的考察の端緒を切った [50] が、さらにそれに触発されて Uhlmann は、ホロノミーベースの Uhlmann connection-curvature を導入して、現在では Uhlmann-Chern 数として知られるトポロジカル不変量を導入していたのであった。底空間は密度作用素全体（トレース 1 の正作用素）で、不覚にも Corach ら [13] がそれをチェックしていたことも初めて知った。もちろん構造的に少し違うのであるが、底空間は部分集合であり比較しやすい。実際、[13] では、単位作用素から出る

測地線は一致すると指摘している。少し問題点があるので、まずこちらの幾何学的結論の吟味から始めよう。

CPR 幾何では、可逆正作用素 A から B への測地線 γ は、初期値 $\gamma(0) = A$ 、初期速度は相対作用素エントロピー

$$\dot{\gamma}(0) = S(A|B) \equiv A^{\frac{1}{2}} \log(A^{-\frac{1}{2}} B A^{-\frac{1}{2}}) A^{\frac{1}{2}}$$

であるので、

$$\gamma(t) = A^{\frac{1}{2}} \exp(t A^{-\frac{1}{2}} S(A|B) A^{-\frac{1}{2}}) A^{\frac{1}{2}} = A^{\frac{1}{2}} \exp(\log(A^{-\frac{1}{2}} B A^{-\frac{1}{2}})^t) A^{\frac{1}{2}} = A \#_t B$$

であった。それに対し、彼らのいう Uhlmann の測地線 ([61, (36)] ではなく (37) が正当?) は

$$\tilde{\gamma}(t) = \exp(tZ) A \exp(tZ^*)$$

(Z はリアブノフ型方程式 $S(A|B)A = ZA^2 + A^2Z$ の解) だそうである (これは Gr の幾何平均測地線 $P \#_t Q$ と同じ型 [22])。ここで、 $A = I$ と置いて、 I から B への測地線で比較すると、Uhlmann の方程式の Z は $\log B = 2Z$ より、 $Z = \log B^{\frac{1}{2}}$ となり、

$$\tilde{\gamma}(t) = B^{\frac{1}{2}t} B^{\frac{1}{2}t} = B^t = \gamma(t)$$

となって測地線は確かに一致しているがこれは正確ではないだろう。なぜなら、この設定では、CPR 理論のように C^* -環ベースではなく、行列若しくは trace class 作用素ベースなので、 I はトレースが正規化されていないと思われ、密度作用素ではないからである。 n 次行列内の話であれば密度作用素で、 $A = \frac{1}{n}I$ とすれば、homogeneity により $\log nB = S(I|nB) = 2Z$ となり、 $Z = \log(nB)^{\frac{1}{2}}$ となって、

$$\tilde{\gamma}(t) = \frac{1}{n}(nB)^{\frac{t}{2}}(nB)^{\frac{t}{2}} = \frac{1}{n}(nB)^t = \frac{1}{n}(I \#_t(nB)) = A \#_t B = \gamma(t)$$

で等しいことが確認できる。しかし、これは両端以外は一般に密度作用素にならず、この幾何学描像は底空間が密度作用素全体ではないということの意味しているが、測地線としては疑問が残るものである。少なくとも $(nB)^t / \text{Tr}(nB)^t$ に正規化しておかないと密度作用素内の曲線にならない。

ただし、[13] では底空間自体は単位的 C^* -環の可逆な正作用素全体としており、密度作用素全体にはとっていないので、それ自体を問題にすべきではないかもしれない。しかし少なくとも無限次元では、可逆なものは trace class を排除するので密度作用素自体の空間が主体にならず、整合的な捉え方ではないように思えるので、[13] の解釈は疑問が残るものである。Uhlmann[59, 60, 61] では、余り整理されているとはいいがたいが、密度作用素内の「測地線」の議論は見当たらず、平行移動のみ議論しているようである (接ベクトルの議論ではないので平行性が分かりにくい)。ただ、底空間はやはり密度作用素全体に、ファイバー束は次で述べる \mathcal{H}^{ext} にとっているようであるので、上記の最初の $\tilde{\gamma}$ は測地線ではなく、密度作用素である必要のない (parallel) lift の方であろう。したがって、射影で密度作用素に落としたものはまさしく前述の正規化 $(nB)^t / \text{Tr}(nB)^t$ になっている。そういう意味で [13] はすこし書き間違いがあったように思われる。

それでは、元に戻って Uhlmann について述べる。オリジナルの [59, 60, 61] は少し読みにくしい (上記の議論はオリジナルのもので考察した)、その後の発展もあって位置づけが未成熟なので、

[9, 10, 28, 40]などを参考にした。今では、「熱力学において、一定温度 0 の場合が第一 Chern 数に当たり、温度が変化したときが（平均）Uhlmann 数 n_U 」という位置づけになっている。また、数学的には、甲元描像が 1 次元の $U(1)$ ベースで Berry フェーズを見ているので、これを $U(1)$ ホロノミーととらえた B.Simon の視点 [50] がベースになっていて、 n 次元では、 $U(n)$ のユニタリ作用素 U がかった ($X \mapsto UXU^*$ は密度作用素性を保持しているので) ホロノミーとみるという発想から出発している。

もう一つ重要な対象は、purification である。純粋状態は単位ベクトル x もしくはランク 1 の密度作用素 $xx^* = x \otimes x^*$ で表されるが（テンソルの一般形を考えてもわかるように）一般の混合状態はランクが 2 以上なので、単一ベクトルのテンソルでは書けない。そこで、密度作用素はトレースが必要なので、有界作用素環 $B(\mathcal{H})$ の中の Hilbert-Schmidt 作用素に対応する空間を、元の Hilbert 空間 H の拡張空間として

$$\mathcal{H}^{\text{ext}} = \{W \in B(\mathcal{H}) \mid \text{Tr}(WW^*) < \infty\}$$

と置く（内積は $\langle W_1, W_2 \rangle = \text{Tr}W_1^*W_2$ ）。すると、もとの \mathcal{H} 上の密度作用素 ρ （その全体を Ω とする）は、

$$\pi : \mathcal{H}^{\text{ext}} \rightarrow \Omega, \quad W \mapsto \frac{WW^*}{\text{Tr}(WW^*)}$$

の像として得られるので、ファイバー $\pi^{-1}(\rho)$ の（一意的には決まらない）元を ρ の **purification** という。上記で述べたように、これが Uhlmann 幾何のファイバー束になっている（ただ行列の場合、 Ω の接ベクトルは traceless な Hermitian 相当であろうが、この話が曲線の微分以外出てこない）。これは、混合状態の密度作用素 ρ について、 $\sqrt{\rho} = |\rho^* \rho|$ はもはや trace class さえ保持していないが、ユニタリ U を掛けた $W = \sqrt{\rho}U$ は $WW^* = \rho$ になるので、 $W \in \mathcal{H}^{\text{ext}}$ （即ち Hilbert-Schmidt）でファイバーに入っている（ $U^* = U^{-1}$ が要求されるので、必然的にユニタリ）。したがって上記のユニタリな自由度から拡張空間が N 次の行列になっている場合、ファイバーの構造群は $U(N)$ とみなせることがわかる。

このような W を ρ の **amplitude** あるいは **lift** というが、2 つの物（接ベクトルでなさそうなので違和感はあるが）の平行性を

$$W_1^*W_2 = W_2^*W_1$$

の正定値性（可逆正作用素の意味で使う）で定義する。拡張空間内の path $W = W(t)$ をとれば、本来に接ベクトル \dot{W} との関係で、lift の平行性（水平性？）は

$$W^*\dot{W} = \dot{W}^*W$$

で、外微分を使った作用素値の Uhlmann connection form

$$\Theta = \frac{W^*dW - dW^*W}{\text{Tr}WW^*}$$

は、この場合消えて「自己平行曲線」となって「拡張空間では測地線」的である（そうはどこにも書いていないが）。このような lift は Berry 位相との整合性を加味すれば、（ユニタリを除いて）ユ

ニークに決まる。滑らかにつながるように $U = U(t)$ を選定して、Uhlmann connection (Berry 接続の一般化) を $A_U \equiv (dU)U^*$ とし、Hamiltonian を時間順に計算する (A_U では左に dU があるので非可換性保持の) time ordered exponential $\mathcal{T}\exp$ によって一般曲線 γ に沿ホロノミーを

$$U_\gamma = \mathcal{T}\exp \int_\gamma A_U$$

とするとき、 $\rho = \rho(t)$ として、Uhlmann phase Φ_U が³

$$\exp(i\Phi_U) = \text{Tr}(\rho(0)U_\rho)$$

によって決まる。そこで、(mean) Uhlmann curvature を、2 方向 x, y と各無限小変化率 δ_x, δ_y によって

$$\mathcal{U}_{xy} = \lim_{\delta_x, \delta_y \rightarrow 0} \frac{\Phi_U(\rho)}{\delta_x \delta_y}$$

とするとき、Uhlmann(-Chern) 数 n_U を甲元の方法と同様に

$$n_U = \frac{1}{2\pi} \int_{(k_x, k_y) \in \text{BZ}} \mathcal{U}_{xy} dk_x dk_y$$

と定める。ここで、熱力学との関係を見るために状態を、Gibbs 状態 $\rho = \frac{\exp(-\beta L)}{\text{Tr} \exp(-\beta L)}$ (ただし、温度 T について $\beta = \frac{1}{kT}$) をもとに考えると、注 2) のように、pauli 行列で分解した 3 成分を持つ 3 次元 Bloch ベクトル h_k について

$$\mathcal{U}_{xy} = \tanh \frac{\beta |h_k|}{2} \tanh^2(\beta |h_k|) \cdot F_{xy}^{\text{B}}$$

(F_{xy}^{B} は Berry curvature) となつて、 $T \rightarrow 0$ 即ち $\beta \rightarrow \infty$ について、 \tanh は ∞ で 1 なので \mathcal{U}_{xy} は F_{xy}^{B} に収束し、 n_U は第一 Chern 数に収束する。

ただしこれらの議論は、簡単のため主に full rank (可逆) の密度行列という仮定の下でなされており、可逆性との矛盾で無限次元化までに壁がある。今後数学的に明確な枠組みの中で定義され直すことを期待したいが、測地線を明示的に求めた [14] もまだ Uhlmann の最適性と矛盾するように見えるが、それを無視してちょっと変更すれば、以下のように与えられると考えることができる：full rank 密度行列全体 Ω_+ を考える。 $\rho\omega_+$ に対し、 $W\pi^{-1}(\rho)$ を取り (これも当然ながら full rank になる)、その水平な接ベクトル $V \in T_W$ (水平性は $W^*V = V^*W$) で $\text{Tr}VV^* = 1$ と正規化されたものをとる。ここで注意したいことであるが、幾何学的にはかなり無理なことをしているので、いっそのこと Ω の接空間は Hermitian で traceless なのだから、(最適性と矛盾するが³) 水平性は

$$W^*V = V^*W \quad \text{かつ} \quad \text{Tr}(W^*V) = 0$$

とすべきであると思う。それで (測地線に対応する) \mathcal{H}^{ext} の中の horizontal lift として

$$c(t) = W \cos t + V \sin t \quad (t \in (-\varepsilon, \varepsilon))$$

(ε は W の full rank 性を保つ範囲でとる) をとらえたほうが見やすい。すると、これを底空間に落としたものも full rank なので正定値行列となり、

$$\pi(c(t)) = c(t)c(t)^* = WW^* \cos^2 t + (WX^* + XW^*) \sin t \cos t + XX^* \sin^2 t$$

となるが、 $\mathrm{Tr}(WX^* + XW^*) = \mathrm{Tr}(X^*W + W^*X) = 0$ となって

$$\mathrm{Tr} \pi(c(t)) = \mathrm{Tr} WW^* \cos^2 t + \mathrm{Tr} XX^* \sin^2 t = \cos^2 t + \sin^2 t = 1,$$

即ち $\pi(c(t)) \in \Omega_+$ となることがわかる。これが、Uhlmann の幾何学における測地線であり、この形しかない [14] では指摘されている。もちろん

$$\pi(c(0)) = WW^* = \rho$$

である。

ところで蛇足であるが、このような曲線 [22] で述べた Grassman 多様体として、(rank で割ってやれば) rank 一定の射影行列の幾何平均に対応するという、全く予想外の結末である。しかも各 rank でこのタイプの測地線となりそうであり、詳細は別添きさんにお任せするつもりである。

おわりに

個々の厳密な定義なしに概観したので、正確ではない解説になってしまっているが、それでも、混沌レベルから、大体の配置提示までは敷居を下げたつもりである (間違った解釈があるかもしれないが自分なりにはイメージできた)。長さの制約上、厳密さを犠牲にして粗筋を示しただけといってもよい。多くの研究者たちがどのようにしてきたかの物語若しくはガイドブックとして読んでいただければ幸いである。興味を持たれたら、参考文献を当たっていただきたいと思う。

なお、執筆中に新しい対称性発見のニュースが飛び込んできた (2022.3.15)。「非可逆的対称性 (noninvertible symmetry)」と言うらしいが、東大の大森助教が著者の一人である [30] で、TQFT におけるいくつかの例示とともに発表された (したがって、関連しているものの、同じ Chern でも Chern-Simons 理論の方である)。奥々わからないが、解説ではミクロの重ね合わせがマクロの重ね合わせにできる非可逆性で、特定の量子相転移もイジング模型における類似現象とみられるらしい。この分野はどんどん発展しているので、今回書いたようなことが、今後どのように書き換わっていき、どう説明されていくのかが楽しみではある。

謝辞. 本研究は科研費 (課題番号: 19K03542) の助成を受けたものである。

参考文献

- [1] 足立健朗, Atiyah-Singer 指数定理ノート, <http://www.yo.rim.or.jp/~kenrou/math/index.pdf>
- [2] 荒木捷朗, 位相的 K-理論 III, 数学 23(4)(1971), 272-292.
- [3] 浅野建一, 固体電子の量子論, 東京大学出版会, 2019.
- [4] 安藤陽一, トポロジカル絶縁体入門, 講談社, 2014.

- [5] M.F.Atiyah, R.Bott and A.Shapiro, Clifford modules, *Topology* **3**(1)(1964), 3–38.
- [6] J.E.Avron, R.Seiler and B.Simon, Homotopy and quantization in condensed matter physics, *Phys. Rev. Lett.* **51**(1)(1983), 51–53.
- [7] J.Bellissard, A.van Elst and H.Schulz-Baldes, The non-commutative geometry of the quantum Hall effect, *J.Math. Phys.* **35**(10)(1994), 5375–5451.
- [8] B.Blackadar, *K-Theory for Operator Algebras* 2nd ed, Cambridge Univ. Press, 1998.
- [9] J.C.Budich and S.Diehl, Topology of density matrices, *Phys. Rev. B* **91**(2015), 165140.
- [10] A.Carollo, B.Spagnolo and D.Valenti, Uhlmann curvature in dissipative phase transitions, *Svi. Rep.* **8**(2018), 9852.
- [11] R.L.Cohen, *The Topology of Fiber Bundles Lecture Notes*, Stanford Univ., 1998.
<http://math.stanford.edu/~galatius/282C18/Ralph's%20notes.pdf>
- [12] A.Connes, C^* -algèbres et géometrie différentielle, *C.R.Acad. Sci. Paris Sér. A-B* **290**(1980), A599-A604 (arXiv:hep-th/0101093).
- [13] G.Corach and A.L.Maesiripieri, Geometry of positive operators and Uhlmann's approach, *Rep. Math. Phys.* **47**(2)(2001), 287–299.
- [14] J.Dittmann, On the Riemannian metric on the space of density matrices, *Rep. Math. Phys.* **36**(2/3)(1995), 309–315.
- [15] M.Eckstein, On projections in the noncommutative 2-torus algebra, *SIGMA* **10**(2014), 029.
- [16] J.Evans, Lecture 3: $U(1)$ -bundles. <http://jde27.uk/aym/lecture3.pdf>
- [17] J.I.Fujii, Structure of Hiai-Petz parametrized geometry for positive definite matrices, *Linear Algebra. Appl.* **432**(2010), 318–326.
- [18] 藤井淳一, 微分可能多様体としての正定値行列とその測地線, 大阪教育大学紀要 第III部門 自然科学応用科学 **59**(2010), 1–14.
- [19] J.I.Fujii, Path of quasi-means as a geodesic, *Linear Algebra. Appl.* **434**(2011) 542–558.
- [20] 藤井淳一, 算数における数の数学的構造, *数学教育研究* **47**(2018), 139–154.
- [21] 藤井淳一, Fibonacci anyon における TQC 再説, *数学教育研究* **49**(2020), 37–48.
- [22] J.I.Fujii, Means for fixed rank PSD matrices, *Adv. Oper. Theory* **5**(2020), 816–838.
- [23] J.I.Fujii and E.Kamei, Relative operator entropy in noncommutative information theory, *Math. Japon.* **34**(1989), 341–348.
- [24] J.I.Fujii and Y.Seo, Jones' index and the relative operator entropy, *Math. Japon.* **34**(1989), 349–351.
- [25] T.Hadfield, Fredholm modules over certain group C^* -algebras, *J. Operator Theory* **51**(1)(2004), 141–160.
- [26] A.Hatcher, *Vector Bundles and K-Theory*, Lecture Note 2007.
<http://pi.math.cornell.edu/~hatcher/VBKT/VBpage.html>
- [27] Y.Hatsugai, Chern number and edge states in the integer quantum Hall effect, *Phys. Rev. Lett.* **71**(22)(1993), 3697–3700.
- [28] Y.He, H.Guo and C-C.Chien, Thermal Uhlmann Chern number from the Uhlmann connection for extracting topological properties of mixed states, *Phys. Rev. B* **97**(2018), 235141.
- [29] J.F.Jardine, *Algebraic Homotopy Theory, Groups, and K-theory*, Doctor thesis in Univ. British Columbia, 1981.
- [30] J.Kaidi, K.Ohori and Yunqin Zheng, Kramers-Wannier-like duality defects in $(3 + 1)$ d gauge theories, *Phys. Rev. Lett.* **128**(2022), 111601. Justin Kaidi

- [31] J.Jost, *Geometry and Physics*, Springer, 2009.
- [32] A.Kitaev, Anyons in an exactly solved model and beyond, *Annals of Phys.* **321**(2006), 2-111.
- [33] A.Kitaev, Periodic table for topological insulators and superconductors, *AIP Conf. Proc.* **1134**(22)(2009), 10.1063/1.3149495.
- [34] M.Kohmoto, Topological invariant and the quantization of the Hall conductance, *Annals of phys.* **160**(1985), 343-354.
- [35] 甲元真人, TKNN 論文とトポロジー, *日本物理学会誌* **72**(3)(2017), 195-196.
- [36] 甲元真人, 仁科記念賞「トポロジカル量子物性物理学の創始」、朝日賞「トポロジーの物性物理学への導入」を受賞して, *物性研だより*, **58**(2)(2018), 26-33.
- [37] 甲元真人, トポロジカル量子物性物理学への歩み, *日本物理学会誌* **74**(8)(2019), 578-590.
- [38] 川上則雄, 電子系のトポロジー — トポロジカル絶縁体・超伝導体・半金属 —, 仁科記念賞講演資料, 2017.
<https://www.nishina-mf.or.jp/wp/wp-content/uploads/2019/12/Publication58.pdf>
- [39] M.Lesch, H.Moscovici and M.J.Pflaum, Connes-Chern Character for Manifolds with Boundary and eta cochains, *Mem. Amer. Math. Soc.* **220**(2012), no. 1036.
- [40] L.Leonforte, D.Valenti, B.Spagnolo and A.Carollo, Uhlmann number in translational invariant systems, *Sci. Rep.* **9**(2019), 9106.
- [41] J.de Lisle et al, Detection of Chern numbers and entanglement in topological two-species systems through subsystem winding numbers, *New J. Phys.* **16** (2014) 083022.
- [42] B.Mera et al, The Uhlmann connection in fermionic systems undergoing phase transitions, *Phys. Rev. Lett.* **119**, 0(2017), 15702.
- [43] J.W.Milnor and J.D.Stasheff, *Characteristic Class*, Princeton Univ. Press, 1974.
- [44] S.Mills, *Geometric K-homology and the Atiyah-Singer index theorem*, Mastter Thesis in Adelaide Univ., 2019.
- [45] G.W.Moore, *Quantum Symmetries and K-Theorey*, Lecture Note at St. Ottilien, 2015.
<https://www.physics.rutgers.edu/~gmoore/PiTP-LecturesA.pdf>
- [46] 森本高裕, 古崎昭, トポロジカル絶縁体・超伝導体の分類理論とトポロジカル結晶絶縁体への応用, *固体物理* **50**(6) (2015).
- [47] A.Mukherjee, *Atiyah-Singer Index Theorem – An Introduction*, Hindustan Book Agency, 2013.
- [48] 大栗博司, 先端物理学国際講義 I 資料. <https://ocw.u-tokyo.ac.jp/lecture-search/?q=大栗>
- [49] J.K.Pachos, *Introduction to Topological Quantum Computation*, Cambridge Univ. Press, 2012.
- [50] B.Simon, Holonomy, the quantum adiabatic theorem, and Berry's phase, *Phys. Rev. Lett.* **51**(1983), 2167.
- [51] 沙川貴大, K 理論とバンド理論についてのメモ, 2018.
<http://noneq.c.u-tokyo.ac.jp/articles/>
- [52] 佐藤昌利, トポロジカル超伝導体入門, *物性研究* **94**(3)(2010), 311-349.
- [53] 杉本茂樹, D-brane と K 理論 (入門) 1, *素粒子論研究* **111**(1)(2005), 69-90.
- [54] 高井 博司, 夏目 利一, A. Connes の非可換微分幾何, *数学* **35**(2)(1983), 97-112.
- [55] D.J.Thoules, M.Kohmoto, M.P.Nightingale and M.den Nijs, Quantized Hall conductance in a two-dimensional periodic potential, *Phys. Rev. Lett.* **49**(6)(1982), 405-408.

- [56] J.Tidström and E.Sjöqvist, Uhlmann's geometric phase in presence of isotropic decoherence, *Phys. Rev. A* **67**(2003), 032110.
- [57] D.Tong, The Quantum Hall Effect, TIFR Infosys Lectures, 2016.
<http://www.damtp.cam.ac.uk/user/tong/qhe.html>
- [58] 上田正仁, 物理数学 III, 講義ノート, 東京大学, 2016.
http://cat.phys.s.u-tokyo.ac.jp/lecture/MP3_16/maph3.pdf
- [59] A.Uhlmann, Parallel transport and "quantum holonomy" along density operators, *Rep. Math. Phys.* **24**(2)(1986), 229–240.
- [60] A.Uhlmann, On Berry phases along mixtures of states, *Ann. Phys.* **7**(46)(1989), 63–69.
- [61] A.Uhlmann, A gauge field governing parallel transport along mixed states, *Lett. Math. Phys.* **21**(1991), 229–236.
- [62] A.A.Varshovi, *-cohomology, Connes-Chern characters, and anomalies in general translation-invariant noncommutative Yang-Mills, *REp. Math. Phys.* **86**(2)(2020), 157–173.
- [63] 吉田朋好, ディラック作用素の指数定理, 共立出版, 1988.
- [64] Y.Zhang, A brief introduction to characteristic classes from the differential viewpoint, Lecture Note in Cornell Univ. 2011. <http://staff.ustc.edu.cn/~yzhphy/notes.html>