

帰納的な考え方を働かせた数学的活動の教材化

せ お ゆう き
瀬尾 祐貴

ひらまつ
平松

(大阪教育大学 数学教育部門)

(大阪府立泉大津高等学校)

(2023 年 3 月 11 日受付)

概要：数学的な見方や考え方を働かせ、数学的活動を通すことで、算数・数学の学習過程のイメージ、いわゆるグルグルの図を推進することができる。本稿の目的は、数学的な考え方の中で、「帰納的な考え方」に焦点を当て、学習過程のイメージを「見通し」と「振り返り」を意識した高校生が体験するための教材として、初等幾何の「方べきの定理」についての考察と実践の報告する。

検索語：帰納的な考え方、数学的活動、方べきの定理

1. 問題の所在と研究の目的

平成 30 年度告示の高等学校学習指導要領の「算数・数学の学習過程のイメージ」において、『イメージ図の右側の「数学の世界」に含まれる過程は、数学の事象から問題を見だし、数学的な推論などによって問題を解決し、解決の過程や結果を振り返って統合的・発展的、体系的に考察する過程である。数学の事象から問題を見だす過程を、イメージ図では「数学の事象の数学化」としている。これは、数学的な見方・考え方を働かせ、数量や図形及びそれらの関係などに着目し、観察や操作、実験などの活動を通して、一般的に成り立ちそうな事柄を予想することである。この予想した事柄に関する問いが「数学的に表現した問題」となる。そして、数学的に表現した問題をより特定なものに焦点化して表現・処理したり、得られた結果を振り返り統合的・発展的に考察したりする』とある。つまり、算数・数学の学習過程のイメージ（いわゆるグルグルの図）を何回も回す推進力とは、数学的な見方・考え方を働かせ、数学的活動を通して考察を進めることにあるとし

算数・数学の問題発見・解決の過程

【現実の世界】

日常生活の
社会的事象

活用・磨き上げ

【数学の世界】

数学の問題

数学化した問題

結果

A1: 数学化 B: 発見・発見/帰納 C1: 数学化

数学の世界に於いて社会的事象に考え、問題を創発することから成る。

事象を数値的に捉え、数学の問題を思い出し、問題を抽象化、論理的に解決することができる。

※本算書で、算数・数学の事象がどのようにして数学の問題に変わっていくのか、現実世界に於いて、社会に於いてどのように取り扱われるものとなるか、を明らかにすることを目的とし、数値化・数学化の過程を明らかにする。

ている。

ここで、数学的活動、とくに数学の事象から問題を見いだし解決する活動の要点として、発展的、創造的な活動であり、帰納・類推・演繹などの数学的な推論もより適切さを増し洗練され、さらに、「見通しを持つ」ことまでを視野に入れ、質的な高まりを期待できるものとして捉えられている。この数学的活動の充実に関して、「振り返

り」が強調され、「生徒が問題を解決するのみならず、自分が行った問題解決の結果や過程を振り返

って、得られた結果を捉え直したり、新たな問題を見出したりして、統合的・発展的に考察を進めていくことが大切である。数学的な見方や考え方は、学習のプロセス（数学的活動）に着目することで、浮き彫りになる。生徒の問題解決の過程で現れたアイデアや着眼点に焦点を当てる話し合いの在り方の点検、板書の仕方の工夫が必要である」とまとめている。このグルグルの図を回すことの意義をこの視点で明確化している。このことは、OECDの次の報告書でも同様に強調されている[6]。「教育とスキルの未来 Education2030」のなかで、「AAR プロセス」として、「コンピテンシー（新たな価値を創造する力、対立やジレンマを克服する力、責任ある行動をとる力）を身に付けていく能力は、それ自体が見通し、行動、振り返り（Anticipation, Action, Reflection = AAR）の連続した過程を通じて学習されるべきものである。振り返りの実践とは、決断したり、選択したり、行動する際に、これまで分かっていたことや想定したことから一步引いて、状況を他の異なる視点から見直すことによって、客観的なスタンスをとることができる力である。見通しとは、分析的思考力や批判的思考力といった認知スキルを活用して、将来何が必要になるか、あるいは、現時点でとった行動が将来にどのような影響を及ぼすかといったことを予測することである。見通しも振り返りも、いずれも責任ある行動の前提となるものである」とまとめている。

これを片桐[1]がいう数学的な考え方のうち、「帰納的な考え方」を基にして、高等学校の数学A「方べきの定理」についての考察と実践の報告を行うことが本稿の目的である。

2. 帰納的な考え方について

本論に入る前に、「帰納的な考え方」について、簡単にまとめておく[2]。ポリアは帰納について、次のようにまとめている。「観察や特殊な組み合わせから、一般的法則を発見する手続きである。科学者は、ある一定の経験から最も正確な信念を引き出そうと努め、一方では一定の問題についての正確な信念を打ち立てるため、最も適切な経験を集めようとするものである。科学者がこの経験を処理するこの手続きは、ふつう帰納と呼ばれる。そして帰納は物事の観察から始まることが多い。」

ア：個々の間の類似性に気づくこと

イ：つぎに、すべての事例から、一般的関係を導く一般化の段階が続く。

ウ：しかし、ここで大切なことは、この一般的関係は、単に一つの推測であり、暫定的なものに過ぎないということである。

さらに、問題を解決するのに、解決の仕方が見つからず演繹的に解決することができないときなどに、まず一般的ルール、性質を見いだし、これを基にして、当面の問題を解決しようとするときに用いられる考え方である。また、ある問題を解決した時にそれに止まらず、それをきっかけにして、一般的なルール、性質を見いだそうとするときに用いられる考え方である。

片桐[1]は、そのようなポリアの考察に対して、次のようにまとめている。

帰納的な考え方とは、次のように考えを進めていく考え方である。

① いくつかのデータを集めようと努める。

- ② それらのデータの間に共通に見られるルールや性質を見出そうと努める。
- ③ 見出したルールや性質が、そのデータを含む集合で成り立つであろうと推測する。
- ④ この推測した一般性が真であることをより確かにするために、新しいデータで確かめる。

つまり、個々の具体的な例から推測することにより、共通に成り立つ一般的なルールや性質を見つけ出そうとする考え方である。

その具体例として片桐は次の例を挙げている。

(例 1) 1 枚の紙を縦に真二つに折っていく。いつも全部の長方形が真二つになるように、10 回折ると、折り目は何本になるでしょう？

数学科教育法の授業の中で、数学的な考え方についての授業をするときには、いつもこの例を学生に紹介し、一緒に考えている。

- ・実際に A4 用紙を配布し、実験をする。(実際のこの経験が大切である。)
- ・多分、多くて 5 回、普通は 4 回ほどしか折れない。そこで、どうするのか？あきらめるのか？と、聞いてみる。
- ・なかなか方針を述べる学生はすぐには出ず、「わからない」という人が多い。でも、4, 5 人にあてていくと誰かは答えてくれる。(これまで、このような質問をされていないから、戸惑った学生がたくさんいると思われる。)
- ・少ない回数で折った回数と折り目の数の関係に何かないか、調べてみたらよい。(そこに何かの関数関係を見いだす) のような解答がでてくる。
- ・そこで、それを表にしてみる。

回数	1	2	3	4	5	・	・	・	10
折り目の数	1	3	7	15	31	・	・	・	?

- ・ここで、帰納的な考え方の①から④の繰り返しが大切になる。1 回目、2 回目、折り目の数が 1, 3 とくれば、次は、5, 7 と続いていくのかと予想をする。これは、課題が折り目の数であるから、このような予想を立てながら活動することが、帰納的な考え方の大切なポイントである。具体例から一般的な規則を導くことである。しかし、3 回目は、折り目の数は 7 なので、この予想は正しくない。では、1, 3, 7 とくると、差が 2, 4 と増えているので、もしかすると、差が 2, 4, 6, 8 と増えるのかと、新たな予想が立てられる。つまり、折り目の数は、1, 3, 7, 13, 21 となるのか。ところが、4 回目のときの折り目の数が 15 なので、この予想も正しくないことがわかる。いつでも、簡単に予想が立てられ、簡単に確かめられるわけではない。でも、このような予想をするということそのことが大切である。4 回目までの折り目の数は、1, 3, 7, 15 となり、その差は 2, 4, 8 となっている。再度、予想は修正され、差が 2, 4, 8, 16 ではないかと考えられる。すると、折り目の数は、1, 3, 7, 15, 31 となり、実験結果と一致した。では、この予想は正しいのか。これも、あくまでも、予想である。しかし、帰納的に考えたからこそ、このような予想が立てられたのである。このことの意味をしっかりとらえたい。予想から、その裏にある規則に気が付けば内在するルールを見つけられるかもしれない。高校生であれば、 n

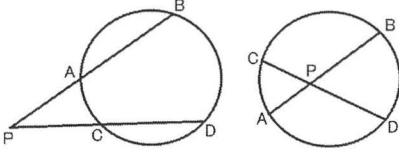
回目の折り目の回数を a_n とすれば、新たな折り方により、 $2a_n + 1 = a_{n+1}$ が成立することをきちんと説明ができるかもしれない。そうすれば、 $a_1 = 1$ より、この漸化式を解くと $a_n = 2^n - 1$ となる。勘のすごい生徒であれば、1,3,7,15,31 から n 回目の折り目の数は、 $2^n - 1$ と気が付くかもしれない。でも、これもあくまでも予想であり、本当に成り立つのかはわからない。帰納的な考え方はあくまでも、予測をするための方法でもあるので、見込みが立てば、それが本当に成り立つのかどうかをしっかりと検証することが大切になる。ここは、気を付けたい点である。繰り返しになるが、帰納的な考え方の良い点はこの予想を立てられる点にあることを肝に銘じたい。このような片桐によるとても良い実例を紹介して、学生にこのような実例を考えてみてくださいという課題をだすが、残念ながら、適切な解答はごくわずかしかない。

さて、帰納的な考え方のポイントとして、高校数学では、関数関係を見いだすことに興味関心が集まるが、具体化のポイントも大切である。つまり、「個々の具体的な例から推測することにより、共通に成り立つ一般的なルールや性質を見つけ出そうとする」という態度が重要であり、経験させたい。この帰納的に導いた関係が常に正しいわけではないことにも気を付けたい。これは、単に、推測でしかない。証明が必要になる。帰納したルールは真とは限らない。でも、これは、「見通しをたてる」ときのもっとも有効な考え方の一つである。

さて、「帰納的な考え方」とは何かを踏まえた上で、数学 A「方べきの定理」の考察と実践を次節で報告する。

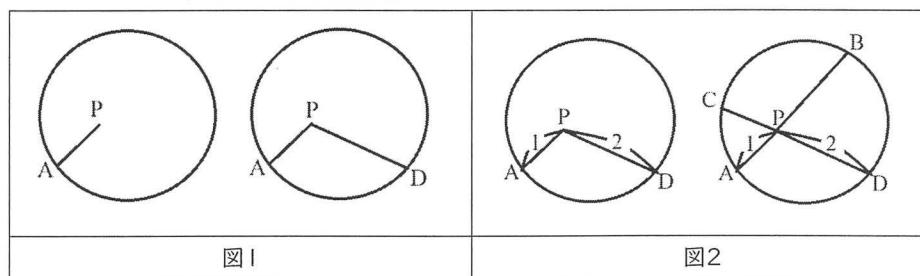
3. 方べきの定理

数学 A の「図形の性質」では、図形の構成要素の関係などに着目し、新たな図形の性質を見だし、論理的に考察したり説明したりできるようにするとともに、図形の性質や作図について統合的・発展的に考察ができるようにすることで、「思考力・判断力・表現力等」の力量を形成するとある。初等幾何の学習では、多くの定理があり、教師にとっても、どのように授業を構成するのかは、常に悩ましいところである。今回は、「帰納」という観点から考えたい。ポリアが指摘するように、「観察や特殊な組み合わせから、一般的法則を発見する手続きである」とある。できれば、生徒とともに、初等幾何の定理の発見を目指したい。そのことで、「帰納」のよさを経験させたい。つまり、「数学の事象の数学化」の学習過程としての数学的活動が伴うようなことができないか。教科書 [3] では、下記のように「方べきの定理」が掲載されていて、それをどう教えるのか？

<p>「方べきの定理」</p> <p>点 P を通る 2 直線が、円とそれぞれ 2 点 A,B と 2 点 C,D で交わっているとき、</p> $PA \cdot PB = PC \cdot PD$ <p>が成り立つ。</p>	
--	--

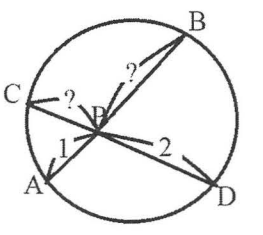
教科書は、このあと、方べきの定理の証明、1 直線が円に接している場合、方べきの定理の応用

として、与えられた $a, b > 0$ に対して、算術平均 $\frac{a+b}{2}$ と幾何平均 \sqrt{ab} が作図できること、そして、方べきの定理の逆を述べている。このまま、教科書に沿って、授業を展開してもよいが、もう少し導入部を工夫できないか。例えば、方べきの定理を生徒に見つけさせることができれば面白いと思う。しかし、線分の長さの積に関係する話なので、実測をしても正しく評価できないし、それより、なぜ線分の長さを掛け算せよと生徒に言うのか？という問題もある。この「方べきの定理」については、そのような発見的な取り組みは難しいかなと思っていた。そこで、ふと、長さを実測することは難しいが、比であれば、すぐに求められるのではないかと考えた。実際、方べきの定理の証明は二つの三角形の相似から対応する辺の比が等しいことから方べきの定理を導いている。そこで、このアイデアに基づいて、次のような授業構成を考えた。

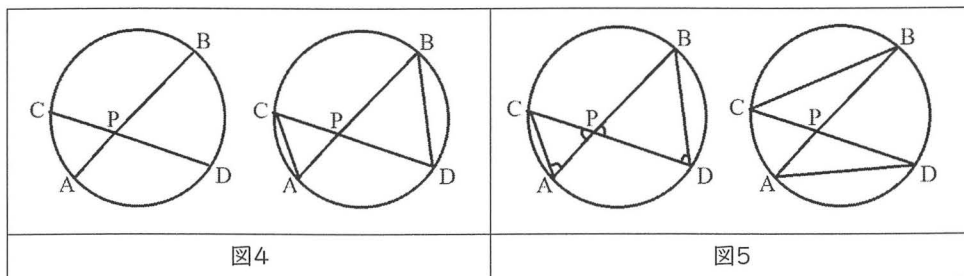


まず、黒板に大きくコンパスを用いて、円をかき、内部に1点Pをとる。点Pと円周上の点Aを結ぶ。コンパスで2点PAの距離を測り、その長さの2倍の点を円周上に取り、それを点Dとする（図1）。つまり、 $PA:PD=1:2$ となっている。さて、次に、線分DPを延長し、円との交点を点C、線分APを延長し、円との交点を点Bとする（図2）。このとき、線分PCとPBの長さに関係はどうなっているだろうか？黒板では、見た目の長さの感じが分かりにくい。片桐の例と同じように、必ず、何人かの生徒には聞いてみたい。あまり、そういう質問を受けたことがない場合は、生徒の反応は芳しくないが、それでも、1:2かなとか言ってくれるまで、待ちたい。もちろん、それ以外の解答もあるかもしれないが、いずれにしても、どうしたらそれを確かめられるだろうかと聞いてみたい。今回は、コンパスを用いて、作図をしているから、それを踏まえれば、PCの長さをコンパスでとって、PBの長さを測ればよいと言ってくれる生徒が出るかもしれない。そこで、実際にコンパスで2点PCの距離を測り、PBを測ると大体2つ分であることが分かる。すると、 $PC:PB=1:2$ か。これは、たまたまなのか。それとも、いつでも言えることか？生徒の反応は大変興味深い。観察や実験から、一般法則を見いだすことが、「帰納」の大きな考え方である。いつでも言えることかどうかを見るためには、点Pの位置をいろいろと変えてみて、 $PC:PB$ の比を調べさせたい。生徒に実際にノートに作図をさせたい。ただ、高校生といえども、コンパスの扱いは上手ではない。多少の時間はかかるが、この作業は大切であろう。どの生徒の結果も1:2になれば、これは、生徒にとって、「確信」が変わるところである。ここで、もう一つ大切な点は、その予想をしっかりと数学の言葉で書き表すことである。自分の言葉で、その結果を、成り立ちそうな事柄を明示したい（図3）。ここは、高校生といえども、難しいところである。このように文章化することが大切である。文章化することで、さらに、数学的な内容が生徒それぞれに伝わる。そうすれば、比に関係をしている

ので、おそらく三角形の相似を利用できるのではないかな。でも、ここには、三角形はないので、自分で三角形を作らないといけない（図4、5）。

<p>円の内部の点 P に対して、$PA:PD=1:2$ となる 2 点 A と D をとる。AP の延長と円との交点を B, DP の延長と円との交点を C とする。このとき、$PC:PB=1:2$ が成立するのか？</p>	 <p style="text-align: center;">図3</p>	<p>2 点 A と C, 2 点 B と D を結んで、$\triangle PAC$ と $\triangle PDB$ を考えると、対頂角が等しいことと、円周角の定理で $\angle A$ と $\angle D$ が等しいので、二つの三角形は相似である。従って、対応する辺の比は等しいので、$PA:PD=PC:PB$ がわかる。今、$PA:PD=1:2$ なので、$PC:PB=1:2$ が</p>
---	---	---

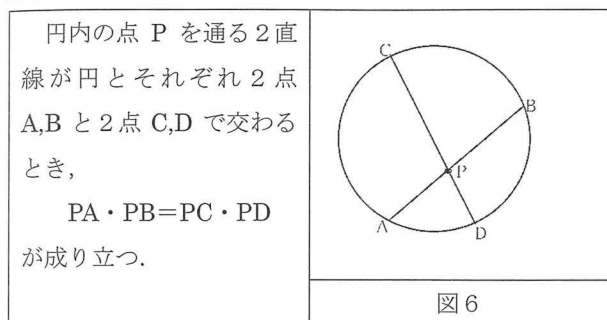
わかる。私たちの予想が正しかったことが分かった。つまり、内部にどんな点 P を取っても、いつでも成り立つことがわかった。こういうところ、つまり、内部のどんな点を取っても成り立つということは、繰り返し、強調したい。



さて、ここまでのことを振り返ってみる。円内の 1 点 P をとり、それに対する活動、 $PA=1$ に対して $PD=2$ をとり、線分を延長させることなどが、「数学の事象」に対応していると考えられる。そして、生徒とともにいろいろと作業することで、 $PC:PB=1:2$ になるか？とみんなで議論することで、「数学の事象の数学化」になる。そして、この予想した事柄が、「数学的に表現した問題」に対応している。今回は、相似を用いてうまく証明ができ、この予想が正しいことがわかり、「結果」となる。

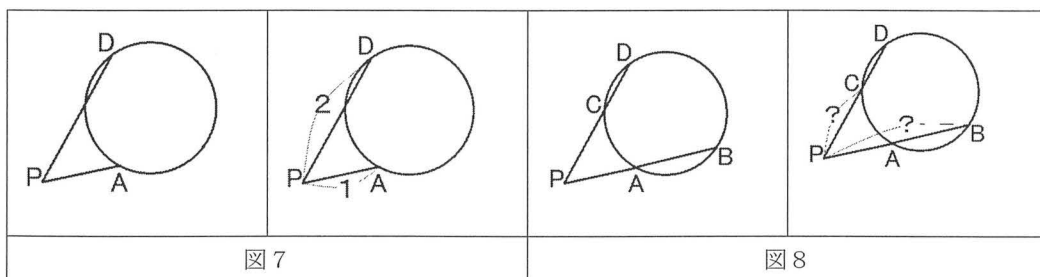
つまり、「帰納」という考え方が有効であることが分かる。しかし、「帰納」のよさはここからさらに、思考が進んでいくことである。 $PA:PD=1:2$ ならば、もっと一般的に、 $PA:PD=1:3$ とか $2:3$ とか、さらに、 $m:n$ ならどうなるだろうと考えることは自然であるし、すでに、相似の証明をしているので、同じ比になることも容易に理解できるであろう。即ち、 $PA:PD=PC:PB$ を導くことになる。比を整理すれば、 $PA \cdot PB=PC \cdot PD$ となる。これを「方べきの定理」という形でまとめることができる。 $1:2$ の議論を振り返り、そこを起点として、発展的に考えたことに相当すると考えられる。ここでも、大切なことは得た結果をみんなで共有することである。得た結果は、 $PA:PD=PC:PB$ であるが、線分の関係から考えると、対応関係があまり美しくないようである。ところが、それを線分の積の形にするときれいな対応関係になっていることに気づく。数学では、少しの見方の変化で得られた結果が他に影響を及ぼすことが多々ある。つまり、円の内部に 1 点 P をとり、P を通る 2 本の線分を AB と CD とすると、 $PA \cdot PB=PC \cdot PD$ が成り立つ。つまり、線分 AB を P で内分し

た線分の積と CD を P で内分した線分の積がいつでも等しいことを主張しているとみることができる。このように、結果の意味をきちんと説明できることがよい。比での結果より、こちらの方が対応関係がより明確なようにみえる。

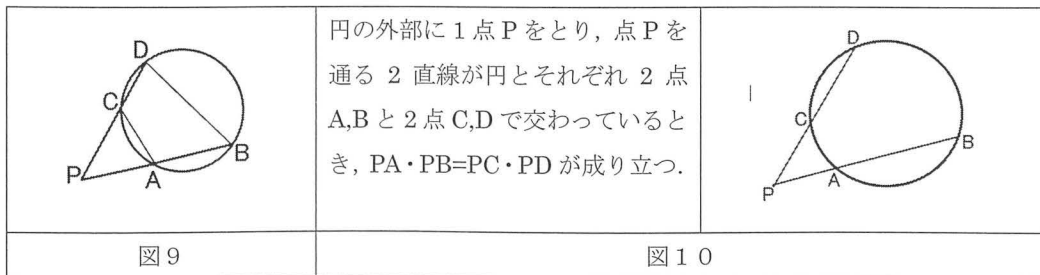


ここで、終わらないのが、学習過程のイメージ(グルグルの図)である。「結果」に対して、「統合・発展／体系化」とあり、新しい「数学の事象」につながっている。今は、円の内部に 1 点を取って考察を進めたが、次はどうなるのか。何かほかに考えられるだろうか？この教師側の働きかけが重要になる。生徒から「円の外部に 1 点を取ったらどうなるのか」という発言がでるまでは、ぜひ待ちたい。きっと、誰かが、言ってくれるはずである。グルグルの図であるところの、発展的に考えてみようということである。

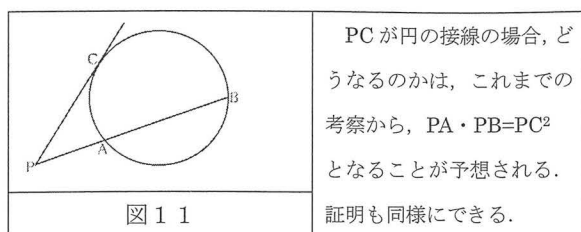
それによって、再び、「数学の事象」から「数学的に表現した問題」につながっていくことになる。「帰納」の威力により、外部の点の場合も、同様な評価式を予想してくれるかもしれない。このまま、結果を述べても良いが、折角、円の内部のときに活動を行ったので、もう少し生徒とともに振り返ることも大切である。円の外部に 1 点 P をとり、円周上の点 A に対して、 $PA=1$ とする。また、 $PD=2$ となる点を円周上にとる(図 7)。つまり、 $PA:PD=1:2$ のとき、 $PC:PB$ はどうなるのか？(図 8) 同様にコンパスを用いて、測ってもよいが、おそらく、すぐに、 $PC:PB=1:2$ であると指摘して



くれるであろう。そして、なぜそうなるのかも、証明の方法も込みで自分で示すことが可能であると期待できる。もしくは、期待したい。さらに、このことから、もっと、一般的にどのようなことが成り立つのかも発表させたい。



さきほどの、円の内部に点 P をとったときの証明を基にしながら、点 P が外部にあるときの証明を自分できちんと行うことで、さきほどの証明の意味が自分の中で整理できる(図9)。



2点 B,D を結ぶという発想も自然とでてくる。そして、図 10 のように、再度、結果をまとめる。このように得られた結果を自分の言葉でまとめるという経験は大切である。ただ、書き方の問題もあるし、それをどういう形でまとめさせるのかは、難しい。

例えば、直線 PC が円の接線になっている場合(図 11)、どのような結果になるのか、生徒に考えさせることもできる。教科書のように、問題として解かせることもよいが、このような授業の流れであれば、自分で新しい結果を予想できることになり、数学に対する見方や考え方が変わるかもしれない。

4. 考察と今後の課題

本稿での展開は、中学校 3 年の「三角形の相似」と「円周角の定理」を用いればできる内容であるので、このような数学的活動を伴う場合、中学校での実践も可能であると考えられる。作業を伴っているのも、生徒も楽しみながら取り組めるのではないかと。特に、「円周角の定理」の有用な使い方の例になっている。しかし、折角、数学的活動を通して、生徒の「方べきの定理」を見つけさせるという実践であるが、最終的な証明は教科書のそれと全く同じであり、この活動のよさが今一歩足りていない。具体的な活動から新しい証明が導かれたなら、よかったのだが、この取り組みでは全く同じ証明になる。

今回は、「帰納的な考え方」を起点にして、見通しと振り返りの繰り返しを行うことで、数学に対する取り組みを深めたが、さらに、「発展」を考えるのであれば、方べきの定理は円に対する結果であるので、それをさらに広げて、楕円や双曲線に対してどうなるのかとも考えられる。そうなれば、ぐるぐるの図を回すことのよさが明確に表れたことになる。

授業後、生徒はこれまで受けてきた授業とは異なるスタイルの授業に困惑して、授業者とともに数学を作り上げていく過程を楽しむことができなかった。生徒を上手に巻き込むためには、指導者が考えようとしていることをクラスで考えようとするための工夫が必要だった。それは、今回の題材だけではなく、普段の指導においても生徒一人ひとりと指導者が一緒になって思考を進められているかにもよるから、従前の指導者主体の授業では「ぐるぐるの図」を推進していくことは難しいと気づき、普段の授業の改善のきっかけにもなった。数学的に考える力を発揮させるためには、教材の精選や授業者の発問の仕方などさらに分析が必要であることが分かった。問題は山積みであり、今後の課題である。さらに授業実践研究を深めていきたい。

- [1] 片桐重雄 数学的な考え方の具体化 明治図書 1998 年
- [2] 片桐重雄 数学的な考え方の具体化と指導 明治図書 2004 年
- [3] 高橋陽一郎編 詳説 数学 A 啓林館 平成 23 年
- [4] 瀬尾祐貴 「方べきの定理」の教材化について 数学教育実践研究会 「算数・数学の授業」186 号 38-41 2022 年
- [5] 瀬尾祐貴 数学的な見方や考え方について 数学教育実践研究会 「算数・数学の授業」189 号 3-7 2023 年
- [6] OECD Education 2030 THE FUTURE OF EDUCATION AND SKILLS Education 2030 (日本語版)
http://www.oecd.org/education/OECD-Education-2030-Position-Paper_Japanese.pdf