ものの見方・考え方

– 条件付き総和の場合 –

富永 雅（とみ なが まさる）　松本明美（まつ もと あけ み）　藤井正俊（ふじ い まさ とし）
（大阪教育大学　初等教育部門）　（元大阪教育大学　数学教育部門）　（大阪教育大学 名誉教授）

(2023年3月25日 受付)

概要：中学校から高等学校への推移の中で, 数学における壁の一つに記号の問題がある. その典型的な例が, 総和の記号 $\sum$ である. 本稿では, 条件付き総和を k 人ゲームの n 人による総当たりリーグ戦のゲーム数との関わりから検討する. ある問題に興味を持ち, 粘り強く取り組み克服することにより, さらにその発展形を創造するという過程がここに例示される. ものの見方・考え方の視点が, この条件付き総和の問題において, 極めて有効であることを示している.

検索語：条件付き総和, k 人ゲーム, 組合せ

はじめに

総和記号 $\sum$ は, 高等学校の数学Bで扱われる. 具体的には, 等差数列に関連し,

$$1+2+\cdots+n=\sum_{k=1}^{n} k$$

に始まり, 公式

$$\sum_{k=1}^{n} k=\frac{1}{2}n(n+1)$$

を学習する. それに引き続き,

$$\sum_{k=1}^{n} k^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1), \qquad \sum_{k=1}^{n} k^3=\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2$$

が, 数学的帰納法による証明の典型として提示される.

元来, 数学記号は簡素化のために導入される. この総和記号も例外ではないが, 一方で, その記号の有効性を認識し活用に至るまでには時間を要するように見受けられる. そこで本稿では, その有効性を条件付き総和で検証する. さらに, 数学教育的見地から言えば, ある問題に興味を持ち, それに粘り強く取り組み克服する中でその発展形を創造するという過程がここに具現化されている. ここでの思考の要点は, 「見方を変える」あるいは「その構造に着目する」ことである.

さて, 事の発端は, 柳研二郎氏のRIMS（京都大学数理解析研究所）での講演における次の補題である [?]：

補題 1． 実数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ に対して,

$$\sum_{i<j}(x_i + x_j) = (n-1)\sum_{i=1}^{n} x_i.$$

上記補題の左辺 $\sum_{i<j}(x_i + x_j)$ は, 与えられた実数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ から異なる 2 数, 特に, それらの添え字 i, j について, 条件 $i < j$ を満たすものだけの和 $x_i + x_j$ を取り, それらの総和を表した数である. このような表現は, 高校数学では扱わないが, 条件付き総和とも表現されるに適したものであり, 記号が発展的に活用できることを示している.

本稿では, 補題 1 を多角的に見ることから始める. その後, その見方を一般的に捉え直し, 補題の一般化について考察を深める.

I. 補題 1 の証明

以後, 便宜的に, 通常の総和を $S_n := \sum_{i=1}^{n} x_i$, 補題 1 の左辺を $T_n := \sum_{i<j}(x_i + x_j)$ とおくと補題 1 は次のように表される：

$$T_n = (n-1)S_n.$$

ここで補題 1 の証明のため, 次の表は有用であり, T_n の見方を変えるものである (表は, $n = 5$ の場合であるが一般の場合も同様):

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	$2x_1$	$x_1 + x_2$	$x_1 + x_3$	$x_1 + x_4$	$x_1 + x_5$
x_2	$x_2 + x_1$	$2x_2$	$x_2 + x_3$	$x_2 + x_4$	$x_2 + x_5$
x_3	$x_3 + x_1$	$x_3 + x_2$	$2x_3$	$x_3 + x_4$	$x_3 + x_5$
x_4	$x_4 + x_1$	$x_4 + x_2$	$x_4 + x_3$	$2x_4$	$x_4 + x_5$
x_5	$x_5 + x_1$	$x_5 + x_2$	$x_5 + x_3$	$x_5 + x_4$	$2x_5$

そうすると, T_5 は対角の右上部に位置した 10 ヶ所の総和に相当する. ここで, 上記の表は対角により対称性を持つことに注意すると, 先の右上部に位置した 10 ヶ所の総和と左下部に位置した 10 ヶ所の総和は相等しい. また, 対角に現れる数の和が $2S_5$ であること, さらには, 各 x_i $(i = 1, 2, \ldots, 5)$ は表中に 10 回登場するから, 表中の総計は $10S_5$ となるので, 次の式を得る：

$$10S_5 (= \sum_{i,j}(x_i + x_j)) = 2S_5 + 2T_5 \quad \text{つまり,} \quad T_5 = 4S_5$$

が成り立つ. (求める T_5 は, 表中の総計 $10S_5$ から対角の数の和 $2S_5$ を差し引いた値の半分とも考えられる.)

さらに, 同様の議論を進めることにより,

$$2nS_n = 2S_n + 2T_n \quad \text{つまり,} \quad 2(n-1)S_n = 2T_n$$

が成り立ち, 補題 1 の結果 $T_n = (n-1)S_n$ が得られる. これが柳氏の提示した証明方法である.

さて, この補題 1 を「ものの見方」という観点で再考する. そのために少し表を変えて, T_5 を求めるのに対角の和 $2S_5$ は関与しないのでその対角を省いた表を記す：

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1		x_1+x_2	x_1+x_3	x_1+x_4	x_1+x_5
x_2	x_2+x_1		x_2+x_3	x_2+x_4	x_2+x_5
x_3	x_3+x_1	x_3+x_2		x_3+x_4	x_3+x_5
x_4	x_4+x_1	x_4+x_2	x_4+x_3		x_4+x_5
x_5	x_5+x_1	x_5+x_2	x_5+x_3	x_5+x_4	

この表は, サッカーや野球などの 2 チームによるゲームを想定し, その試合会場に動員できる各チームの観客数を x_i 人 $(i=1,2,\ldots,5)$ とする. ここで, 各チームの名前 x_i がその観客動員数にすり替わっているが, これが手品の種である. x_i と $x_j(i \neq j)$ が対戦した時の観客数は, $x_i + x_j$ であることが重要なのである.

ここで, 唐突ではあるが,

「総当たりリーグ戦の場合, 各チームの試合数は何ゲームになるか?」

という問題を提示したい. その解は, 即答できるだろう. 総当たりなので, $n-1$ 試合である.

補題 1 との連関は, はじめの表において, (観客動員数) $x_i + x_j$ が対戦 x_i vs x_j に代わり, さらに x_i, x_j と簡略化して次の表が出現する. ある偉い先生が宣われた, 「数学は自由だ」, と. (先の表に倣い $n=5$ の場合を表すが一般の場合も同様):

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	×	x_1, x_2	x_1, x_3	x_1, x_4	x_1, x_5
x_2	x_2, x_1	×	x_2, x_3	x_2, x_4	x_2, x_5
x_3	x_3, x_1	x_3, x_2	×	x_3, x_4	x_3, x_5
x_4	x_4, x_1	x_4, x_2	x_4, x_3	×	x_4, x_5
x_5	$x_5 x_1$	x_5, x_2	x_5, x_3	x_5, x_4	×

さて, 当初の問題

問題 1. $T_n = \sum_{i<j}(x_i + x_j)$ は, $S_n = \sum_{i=1}^{n} x_i$ の何倍か？

に戻る. 補題 1 で一定の解決は見ているものの, 問題 1 は前述の手品により,

問題 2. 2 チームによるゲームで, n チームによる総当たりのリーグ戦を行う場合, 各チームの試合数は何ゲームになるか？

と変化する. これに対しては, 「$n-1$ 試合」と即答できる. 1 つの問題でも, 設定に工夫を凝らすことで, 柔軟な論理的展開が可能になるという事例であり, 多角的にものを見ることの重要性の明示でもある.

本節を終えるにあたり, 蛇足をお許しいただきたい. 次の表中の値の総和が $T_n = \sum_{i<j}(x_i + x_j)$ である：

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1		x_1+x_2	x_1+x_3	x_1+x_4	x_1+x_5
x_2			x_2+x_3	x_2+x_4	x_2+x_5
x_3				x_3+x_4	x_3+x_5
x_4					x_4+x_5
x_5					

一方, 問題 2 に対応させた表は,

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1		x_1,x_2	x_1,x_3	x_1,x_4	x_1,x_5
x_2			x_2,x_3	x_2,x_4	x_2,x_5
x_3				x_3,x_4	x_3,x_5
x_4					x_4,x_5
x_5					

2 つの図表を並べてみると,（問題 1 と 2 を解くという意味で）「これらの図表は構造が全く同じ」という認識に到ることが, 所謂「数学の面白さ」に繋がることを知らされる.

II. 一般化

ここで一休みしないのが, 数学を学ぶ上で大切である. 進むべき道は, 「一般化」. 補題 1 のそれを実践する：実数 $x_1,x_2,\ldots,x_n$ が与えられたとき, $1<k<n$ を満たす自然数 k に対して条件付き総和

$$\sum_{i_1<\cdots<i_k}(x_{i_1}+\cdots+x_{i_k})$$

を補題 1 のように総和の何倍という形で書き表したい. 当然, 同じ手品が武器になる. 実のところ, 麻雀やトランプはこのための恰好の事例である. 10 人の雀士がいて, その中で誰が一番強いかを決めるためには,（4 人での）総当たり戦で決着を付けるのが最も合理的だと思われる. その昔, 大学の周辺にはやたらとあった雀荘は, 今はほとんど見かけなくなったが, 実はこの麻雀の事例が, 一般化の引き金となったことは事実である.

今 n 人がいて, ポ ーカーでも何でもよいトランプの k 人によるゲームで総当たり戦をする場合, 各人はそれぞれ何ゲームずつすることになるのか？ まず総当たり戦を行うことから, 各人が行うゲーム数は一定であることに注意し, その値を ${}_nO_k$ で表す. このとき, 前節の話は ${}_nO_2=n-1$ に纏められる.

さて, 一般化への第一歩は, $k=3$ つまり ${}_nO_3$ を求めることである. まず, ${}_4O_3=3$ は, 実際に

x_1,x_2,x_3 / x_1,x_2,x_4 / x_1,x_3,x_4

の 3 通りである. さらに各人を数字で簡略化し,

1,2,3 / 1,2,4 / 1,3,4

と表す. 同じように, $n=5$ に対して, 全ゲームを並べてみると

$1,2,3$ / $1,2,4$ / $1,2,5$

$1,3,4$ / $1,3,5$

$1,4,5$

この結果, ${}_5O_3 = 6$ がわかる.

同様に, $n = 6$ に対して, 手を動かしてみる：

$1,2,3$ / $1,2,4$ / $1,2,5$ / $1,2,6$

$1,3,4$ / $1,3,5$ / $1,3,6$

$1,4,5$ / $1,4,6$

$1,5,6$

これより, ${}_6O_3 = 10$ が得られる.

ここで, 最初の ${}_4O_3$ の場合を

$1,2,3$ / $1,2,4$

$1,3,4$

と並べ直すと, 一番右端の $n-2$ ゲーム分が丁度 $n-1$ から n への増加分になっている. 従って,（n から $n+1$ への増加分は $n-1$ ゲームになるので,）

$${}_{n+1}O_3 = {}_nO_3 + n - 1 \quad (n \geq 3)$$

がわかり, ${}_nO_3$ は, 次のように表せる：

補題２． ${}_nO_3 = \frac{1}{2}(n-1)(n-2) \quad (n \geq 3)$

証明は, 帰納的に行われる：まず, $n = 3$ のとき, ${}_3O_3 = 1$ は自明である. そこで, n のとき成り立つ, つまり, ${}_nO_3 = \frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ の仮定のもとで, すぐ上で解かったことを使うと

$${}_{n+1}O_3 = {}_nO_3 + n - 1 = \frac{1}{2}(n-1)(n-2) + n - 1 = \frac{1}{2}(n-1)n$$

より, $n+1$ でも成り立つことが分かり, 補題２は証明された.

今証明した補題２は, 条件付き総和については, 次のように表される.

系３． $\sum_{i<j<k}(x_i + x_j + x_k) = \frac{1}{2}(n-1)(n-2)\sum_{i=1}^{n} x_i.$

話を ${}_nO_k$ に戻そう. ${}_nO_2 = n-1$, ${}_nO_3 = \frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ （補題２） まで来ると, ${}_nO_4$ を調べることになる. 今まで通り, 手を動かして,

$${}_5O_4 = 4,\ {}_6O_4 = 10,\ {}_7O_4 = 20$$

が得られる. その計算過程で, 内なる他者の声が聞こえた (cf. [2]). 「帰納的にどんどんできるよ」, と. ゲームの参加者を $1, 2, \cdots, n$ とし, そこに新たな参加者 $n+1$ が加わった場合を想定する. ゲームに要する人数は $k(3 \leq k < n)$ 人としておく. ここで, 影の助言「帰納的に」ということの意味は, 「${}_nO_k$ から ${}_{n+1}O_k$ への増加分を調べよ」だとして, その方向への前進を図る. 実は, これまでの試行錯誤が, 要点は『組合せ』であることを我々の意識の上に浮上させた. まず, ${}_nO_k$ は, 新参

者 $n+1$ がゲームに加わっていない場合の試合総数であることに注意する. そうすると, 増加分とは, $n+1$ が必ず入っている場合の試合総数ということになる. そして, その総数は, 初めからいた $1, 2, \cdots, n$ の中から, （$n+1$ は入っているので,） $k-1$ 人を選んだ場合だと考えればよい. 即ち, 増加分は ${}_nO_{k-1}$ である. まとめると,

$$ {}_{n+1}O_k = {}_nO_k + {}_nO_{k-1} $$

が成り立つ. この等式は, 組合せ ${}_nC_k = \dfrac{n!}{(n-k)!k!}$ の等式

$$ {}_{n+1}C_k = {}_nC_k + {}_nC_{k-1} $$

の精巧な写しである. ${}_nO_k$ はほぼ組合せと同じだということである. 逐一並べて計算して得られたことと合わせると,

$$ {}_nO_4 = \frac{1}{6}(n-1)(n-2)(n-3) = {}_{n-1}C_3 $$

となることは大丈夫そうである. こうして, 定理が次の形で与えられる.

定理４. ${}_nO_k = {}_{n-1}C_{k-1}$ $(2 \leq k \leq n)$ が成り立つ.

証明　参加者を $1, 2, 3, \cdots, n$ とする時, 1 が入っている試合の総数を考えればよいが, それは, $2, 3, \cdots, n$ から $k-1$ を取り出すときの全組合せ数 ${}_{n-1}C_{k-1}$ に一致する. 即ち, ${}_nO_k = {}_{n-1}C_{k-1}$ を得る.

条件付き総和については, 定理４は次のように表現される.

系５. $\sum_{i_1<\cdots<i_k}(x_{i_1}+\cdots+x_{i_k}) = {}_{n-1}C_{k-1}\sum_{i=1}^{n} x_i.$

III. おわりに

便宜上, 補題１を再掲する：

補題１. 実数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ に対して,

$$ \sum_{i<j}(x_i + x_j) = (n-1)\sum_{i=1}^{n} x_i. $$

これと「n チームによる総当たりのリーグ戦における各チームの総試合数」との関係を, それらの構造から見直してみると, ちょっと面白いことがわかる, というのがこの論文の要旨である.

そうすると,「ここでの『構造』とは何ぞや？」ということになるが, この場合『構造』とは,『枠組み』と言い換えられる. 当に字の如くで ($n=5$ の場合), 次の表が考察の基盤を成す.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	×				
x_2		×			
x_3			×		
x_4				×	
x_5					×

各 x_i を数と見るか, チーム名と見るかによって得られる命題の表現は変るが, 要の数 $n-1$ は, 両者をきっちりと纏める旗印の役目を果たしている. 補題 1 に対応するものは, 次の命題 (問題 2) である.

命題 6． 2 人で行うゲームにおいて, n 人による総当たりのリーグ戦を行う場合, どのチームも, $n-1$ 試合ずつ行う.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	×	x_1 vs x_2	x_1 vs x_3	x_1 vs x_4	x_1 vs x_5
x_2	x_2 vs x_1	×	x_2 vs x_3	x_2 vs x_4	x_2 vs x_5
x_3	x_3 vs x_1	x_3 vs x_2	×	x_3 vs x_4	x_3 vs x_5
x_4	x_4 vs x_1	x_4 vs x_2	x_4 vs x_3	×	x_4 vs x_5
x_5	x_5 vs x_1	x_5 vs x_2	x_5 vs x_3	x_5 vs x_4	×

なお, 上記の図は, 総当たりを 【ホーム & アウエー】 で実施する場合に丁度対応していると見ることもできる. いずれにしても, 前述したように枠組みとしての表が思考の基礎基本をなしていることには変わりがない.

実際の試合では, その勝敗の結果が大事であるが, ここでの議論では, その入れ物が大事なのである. 落語にこんなセリフがある：

『いつまでもそんなにふらふらしていて, 子どもや嫁さんにどうしておまんまを食べさせるんだ?』

『箸と茶碗で食わせる. ライスカレーは, 匙で食う.』

というのがあるが, 入れ物が大事だということの教示だと了解している.

謝辞 本論文は,RIMS での研究集会における [1] の講演及びその後の discussion が元になっている. 久々に行われた対面での開催に触発されたものであることを明記すると共に, 柳先生はじめ関係各位に感謝の意を表したい.

参考文献

[1] 柳研二郎，N 型エルミート・アダマール不等式とノルム不等式への応用, 数理解析研究所・研究集会「作用素平均と関連する話題」, 2022 年 11 月.

[2] 藤井正俊, 内なる他者との対話 - 冪平均の場合-, 数学教育研究, **48** (2019), 29–38.