

TQCのLego-Teichmüllerモデル

ふじ い じゅんいち まつ おか とも ひで
藤井 淳一*・松岡 友秀**

*理数情報講座・**修士課程 総合基礎科学専攻

(平成30年7月18日 受付)

トポロジカル量子計算TQCのモデルとして、我々が扱ってきたスピネット・量子群以外にも、モジュラーテンソル圏MTCをベースにして、有理共形場理論RCFT、もしくはトポロジカル量子場理論TQFTなどとの関連も論じられている。一般的には3dTQFTとRCFTの関係が以前から注目されよく論じられてきたが、3次元の幾何学はかなり難解でとっつきにくいものであった。Moore-Seibergが提唱した関係も基本的にこの方向であるが、Bakalov-Kirillovは、それらを改良して2次元の幾何学に限定してモジュラー関手を介してとっつきやすい形に直し、彼らの条件も整備した。この手法によって上記の概念が統一的に扱えることになったが、実際に述べられている結果は少し違っている部分もあって、詳細な解説が必要であるが、そのような論文等はほとんど見かけられない。そこで、彼らの手法もさらにわかりやすく解釈しなおして、その真意を探りたい。

キーワード：MTC, modular functor, TQC, Lego-Teichmüller game, RCFT, TQFT

I はじめに

TQCと略されるトポロジカル量子計算は、ユニバーサルな量子コンピュータの構成を支える方式の一つで、多くの分野と関連して理論的に非常に面白い分野である。ここ何年か本研究室ではこの理論について研究している [5,6,7]。しかしそれらの関連分野のうち、物理学的・幾何学的に重要なトポロジカル量子場理論(TQFT)や有理共形場理論(RCFT)との関連を論じるまでには至らなかった。TQCを巡るこれらの概念は、モジュラーテンソル圏(MTC)でつながっていて、Hopf代数としても解釈可能である。しかし、Wittenらの指摘による直接の関連が指摘されている3dTQFTとRCFTというつながりで、2次元TQFTを考えてしまうと、Frobenius代数どまりとなって、図的には非常に似通っているにもかかわらず、直接MTCやそのHopf代数との関係がつかなかった。しかも、議論の途中では2次元的な概念が結構使われて中心的な役割を果たしていた。その傍証の一つとして、Atiyah [1] が3次元のTQFTを2次元コボルディズムからベクトル圏への関手として定式化していることからもうかがえる。またこの3dTQFTは(特に)2次元の有理共形場理論(RCFT)とも関連が付くので、2次元的な重要性は当然であろう。

一方、RCFTとの関連で、Moore-Seiberg [10] は、共形ブロックを構成する条件を公理的に論じたが、その中でも2dの役割は重要であった。しかしそれでも基本は形式上 $2+1=3d$ となっている。3次元の幾何学となると途端に難しくなり、なかなか素人には手が届かない。そういう意味で匪泥たるものがあつたが、Bakalov-Kirillov [3] は、本当に2d、つまり曲面のみでこれらの関連をとらえなおせるとして、2dモジュラー関手を軸に新しい視点を導入し、Moore-Seibergの公理的条件すらも(彼らは部分的に誤りを正したといっているが) **Moore-Seiberg data**として、整備した。3dだと、立体的な「手術」が必要になるが、2dであれば「まさに表面を撫でるだけで」理解できるので、このおかげで格段に取り掛かりやすくなった。これは、元になった論文 [2] の題名にあるように、Grothendieckが提唱したといわれている「Lego-Teichmüller game」の路線の発展とも言え、写像類群(MCG)とも関連する。しかしそれでもなお、証明が再構成できない部分があり、些末なミスがあるようで、理論のさらなる再整備が必要と思われるが、彼ら大御所の結果はもはや定説と

して確立しており、細かな部分に異を唱えているような論文は見つけられなかった。そこで、ささやかな試みとして、彼らが本当に言いたかったことを、さらに優しい形で再構成したい。

II モジュラー関手とグラフ付き曲面

基本的な道具として簡単には説明するが、詳しくは圏論、モノイダル圏について、[9, 4, 7]などを参照してもらいたい。最初はどうしてもうるさい定義が続くが、細かいことは気にせず舞台を眺めてほしい。

まず、イソトロピーが、写像同士をその空間内で連続変形できるという同値関係であったことを思い出すと、 d -MF (topological d -dimensional modular functor) τ は、以下の条件を満たすデータの集まりとする：

- (1) 境界のない有向コンパクト d -多様体 N に対応する線形空間 $\tau(N)$
- (2) イソトロピー類のみに依存する任意同相射 $f: N_1 \rightarrow N_2$ について、同型射 $f_*: \tau(N_1) \rightarrow \tau(N_2)$ の存在
- (3) $\tau(\emptyset) \cong \mathbb{C}$, $\tau(N_1 \sqcup N_2) \cong \tau(N_1) \otimes \tau(N_2)$

ただし、以下の性質を持つ：

Multiplicativity: $(fg)_* = f_* g_*$, $\mathbf{I}_* = \mathbf{I}$

Functoriality: (iii) の同型は自然同型

Compatibility: $N \sqcup \emptyset = N$, $N_1 \sqcup N_2 = N_2 \sqcup N_1$, \sqcup の結合律

Normalization: $\tau(S^d) = \mathbb{C}$

用語的に補足すると、同型射 f_* は線形空間なので、座標表示すれば「正則行列」のことである。また、記号 \sqcup は disjoint union (共通部分空集合の和集合) を表す。

上記で述べていることは、多様体を線形空間にその性質とともに反映させる仕組みのことを MF と呼ぶと思えばよい。うまく性質を反映させるために細かな条件が付いているだけである。

境界のある有向コンパクト曲面の各境界に 1 点ずつ指定 (それらを結ぶ線も発生) した物を **拡張曲面** (extended surface) Σ というが、これに対応して MF もさらに拡張する (が¹⁾、使うのは 2 次元だけなので次元は限定する) : \mathbb{C} 上のアーベル圏 \mathcal{C} と、圏 $\text{Ind-}\mathcal{C}^{\boxtimes 2} = \{\sum A_i \boxtimes B_i | A_i, B_i \in \mathcal{C}\}^{1)}$ の対称対象 $R = \bigoplus V_i \boxtimes V_i^*$ についての以下のデータ集合を **\mathcal{C} -extended MF** という：

- (1) Σ の境界成分の集合 $\pi_0(\partial\Sigma)$ について、複線型関手 $\tau(\Sigma) = \tau(\Sigma; \{W_a\})^{2)}$: $\mathcal{C}^{\pi_0(\partial\Sigma)} \rightarrow \text{Vec}_f$ の存在
- (2) イソトロピー類のみに依存する任意同相射 $f: N_1 \rightarrow N_2$ について、同型射 $f_*: \tau(N_1) \rightarrow \tau(N_2)$ の存在
- (3) $\tau(\emptyset) \cong \mathbb{C}$, $\tau(N_1 \sqcup N_2) \cong \tau(N_1) \otimes \tau(N_2)$
- (4) **Gluing 同型**. 自然同型 : $\tau(\Sigma'; \{W_a\}, R^{(1)}, R^{(2)}) = \bigoplus_i \tau(\Sigma; \{W_a\}, A_i, B_i) \rightarrow \tau(\Sigma; \{W_a\})$

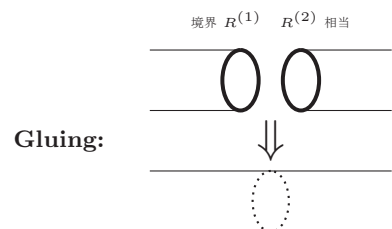
ただし上位同様、以下の性質を持つ：

Multiplicativity: $(fg)_* = f_* g_*$, $\mathbf{I}_* = \mathbf{I}$

Functoriality: (iii), (iv) の同型は自然同型

Compatibility: (iii), (iv) の同型は互いに両立

Normalization: $\tau(S^2) = \mathbb{C}$



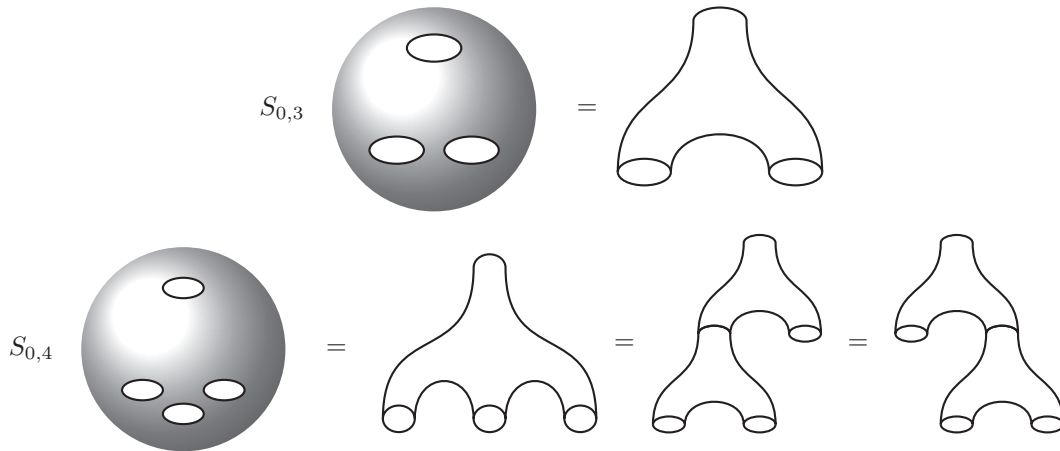
さて、難しそうな定義が並んでしまったので、図を描いてこれから使う道具についての具体的なイメージに助けとしたい。まずここで使う曲面は境界があるので、端っことは円周の切り口になっている。もっとも単純なものは (境界 0 の) 球面で、穴がある場合、円周の境界 (**boundary**) を含むことにする。このような図形の基本単位は「パンツ」 (a pair of pants) と呼ばれているが、語感がよくないのか日本人研究者で「(半)ズボン」と呼ぶ人も多い (e.g., [8])。要するにパンツの裾をつなげてできる曲面が、今後の主役となるものである (通常は逆に「このような (双曲) 曲面はパンツ分解可

1) \boxtimes は、加法圏で定められたテンソル積で、 \mathbb{C} 上のアーベル圏における **Deligne tensor product** と同じ概念である (cf. [4])。

2) a は $\pi_0(\partial\Sigma)$ 上を動き、それに呼応した $W_a \in \mathcal{C}$ はすべての選択を含む。

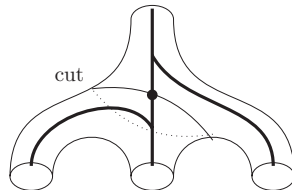
能である」という)。このようにパンツ成分に分解可能であるので、この基本部品において性質を考えるだけでよいのである。それでは、実際に図形を見ていこう。ここで扱う基本図形 $S_{g,n}$ は, **genus** (曲面で構成される穴) g , 境界 n で, 基本的な性質はこれらのパラメータで決まる。 $S_{0,0}$ が通常の球面である。

まず, n -boundary の標準 n -球面 $S_{0,n}$ を考えるが, これは, 次のように pants で作られるものである:



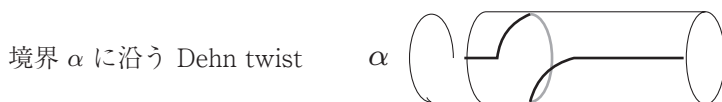
また, 拡張曲面 (**extended surface**) とは, (なめらかで) コンパクトな有向曲面のことであるが, これも pants で作られる。逆にみると, pants への分解は閉曲線でなされ, 分解せずに残された切り口の曲線を **cut** といい, これらを指定することを **parameterization** という。ただし, cut を除いた各連結成分は, 対応する穴あき球面への同相写像が与えられているとする。これは図形的に見えないので, 各連結成分にグラフ (**marking graph**) を描き, その変化の様子で同相写像の変化を見ることで表現できる。そこでこれを強調する場合, グラフ付き曲面という。ただし, 有向曲面なので, それに従う「向き」が境界にも付随している。

[3] では, 順序付けのためにもう少し厳しく規定されているが, ここでは, 下図のように主役の marking graph を太線で書くことにし, cut は細線で表すことにする。グラフは各境界において1点で終わり, (分解したときに cut が境界になるので) cut とともに1点のみで交わる形になっている。通常 cut はパンツ分解をする閉曲線であるが, genus (曲面で構成される穴) が増えると, cut は何本も出てくる。



拡張曲面 Σ の parameterization 全体を $M(\Sigma)$ と書くと, これは「2次元CW複体」と呼ばれる幾何学的対象になる: 頂点としては Σ のすべての marking の集合 $M(\Sigma)$, 辺は向きを持っているものとし, 各辺を **move** と呼ぶ。これは **groupoid** (すべての射が同型な圏) とみなせ, 辺 E_1, E_2 の合成 path を積のように $E_1 E_2$, 逆向きを逆元のように E^{-1} と表す。基点 M から M へのループは $E_1 \cdots E_k(M) = \text{id}(M)$ と表し辺 E が M から M' に行くとき, $E: M \rightsquigarrow M'$ と表す。

ここで, 圏 Γ を, 対象は d 次元多様体, 射を向き保存位相同型のイソトピー類と定めたものとする。多様体 N の写像類群 (**extended surface**) $\Gamma(N)$ は, この圏での $\text{Hom}_{\Gamma}(N, N)$ のことである。これは groupoid になる。また, 拡張曲面については, 写像類群の生成元は **Dehn twist** のみであることは Dehn 自身が示した。

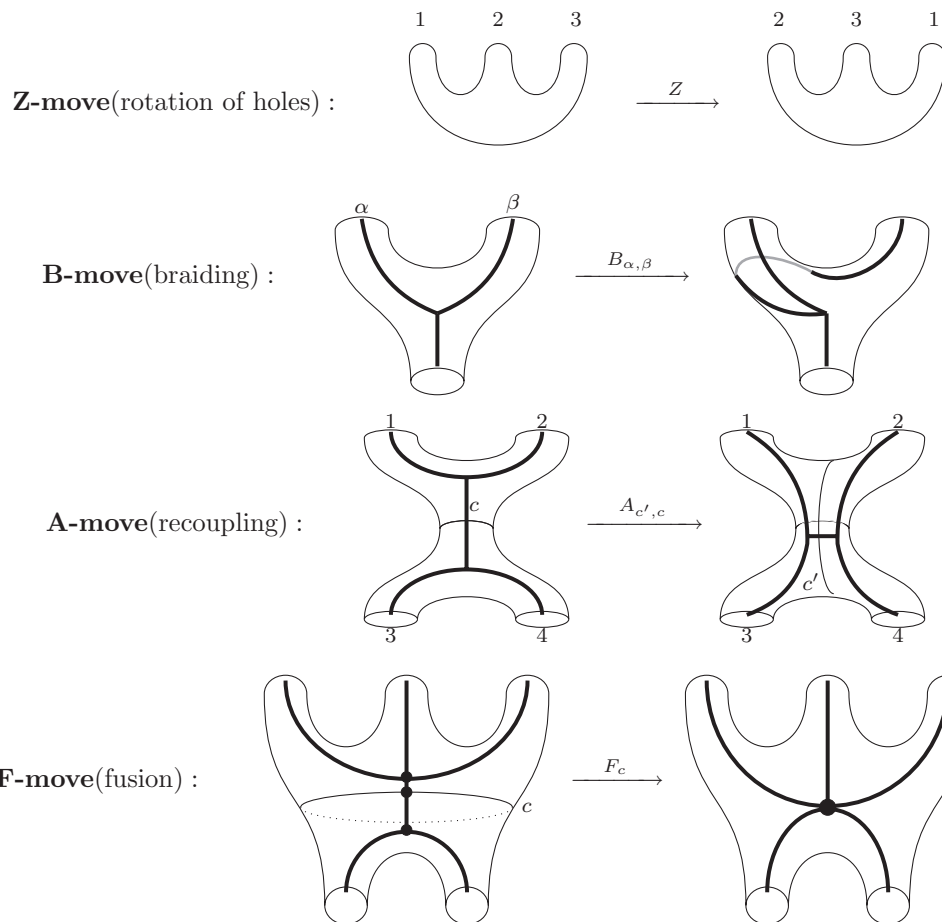


そこで, 対象を拡張曲面に限った Γ を, (**extended**) **Teichmüller groupoid** Teich とする³⁾。以後の話はこれらの図形でなされる。

3) 通常 N の **Teichmüller space** とは, 定曲率 -1 の双曲構造をホモトピー同値で類別したものであるが, pants はそのような構造を持つ基本単位とみなせる。

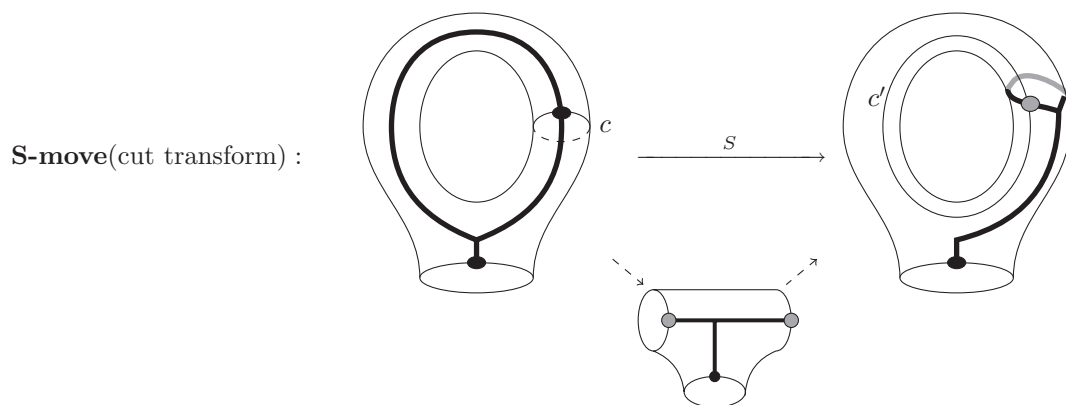
III Lego-Teichmüller game

ここで、基本的な **move** を挙げる：



[3, 2] では、順序関係を示すために矢印を導入しているが、Z-moveは単純に境界のローテーションとした方がわかりやすいと思う。F-move F_c とは、単に cut c を取って両端の接点をつなぐだけのものなので、 $A_{c',c} = F_c^{-1}F_c$ といえる。これらを組み合わせて、B-move の図のように「marking」された線の変化を見て変換の違い・一致についてみるのがLego-Teichmüller game である。

genus がある場合の特殊な move として、パンツの裾を切って内側に縫い合わせることによって $S_{1,1}$ の変換ができる（真ん中のパンツ状態の図は説明のために入れた）：



一旦、cut c でできたパンツの裾を内側にもぐりこませて縫い合わせてできる cut c' は、genus が正面になるように少し向きを変えてやると、右の図になる。

これらの move がMF と整合的であるように, [3] では, 以下の公理系があげられている (ただし, MF 9 は同値で整合的と思われる形に変えた):

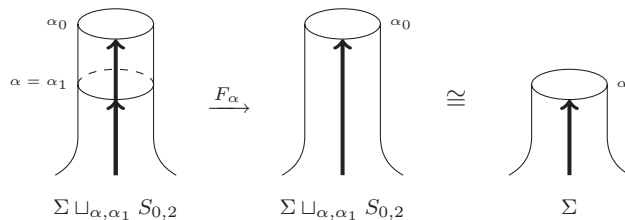
MF 1 Σ が n 個の穴を持つ ($S_{*,n}$) とき, $Z^n = \text{id}$.

MF 2 $Z_{ij}^{k-1} F_c = F_c (Z_i^{-1} \sqcup Z_j)$.

MF 3 Σ が連結で genus 0 で, cut $C = \{c_1, c_2\}$ なら, $F_{c_1} F_{c_2}(M) = F_{c_2} F_{c_1}(M)$.

MF 4 E_k が互いに素な move なら, $E_1 E_2 = E_2 E_1$.

MF 5 (シリンダー追加削除公理)



MF 6 4 穴を $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ の順で持つ $S_{*,4}$ のとき, $B_{\alpha, \beta\gamma} = B_{\alpha, \gamma} B_{\alpha, \beta}$, $B_{\alpha\beta, \gamma} = B_{\alpha, \gamma} B_{\beta, \gamma}$.

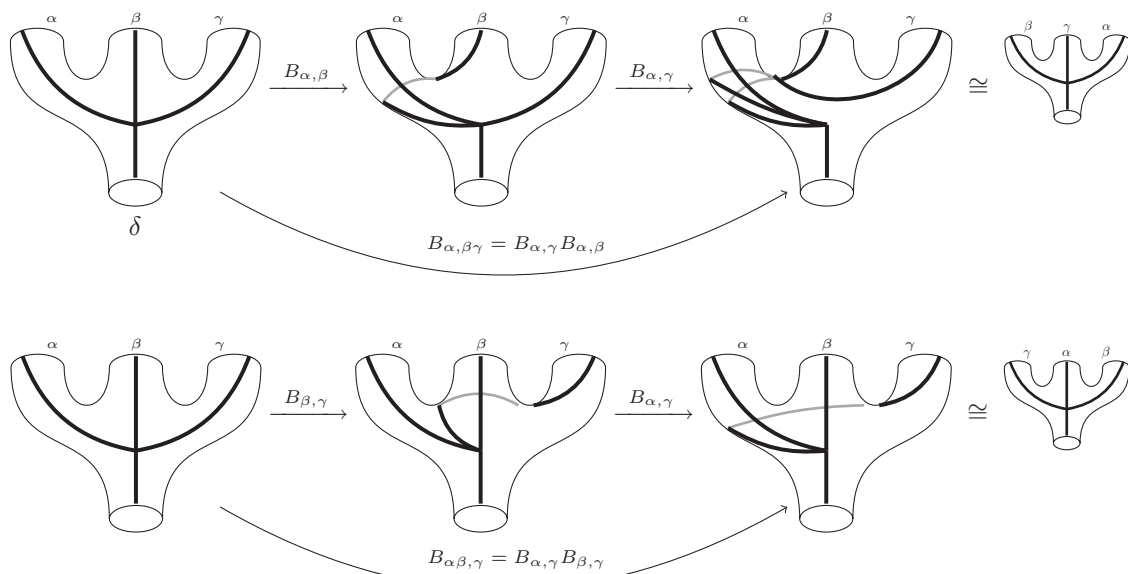
MF 7 2 穴を α, β の順で持つ $S_{*,2}$ のとき, $Z B_{\alpha, \beta} = B_{\beta, \alpha} Z$.

MF 8 1 穴 α のトーラス $S_{1,1}$ の場合, $S^2 = Z^{-1} B_{\alpha, c_1}$, $(ST)^3 = S^2$.

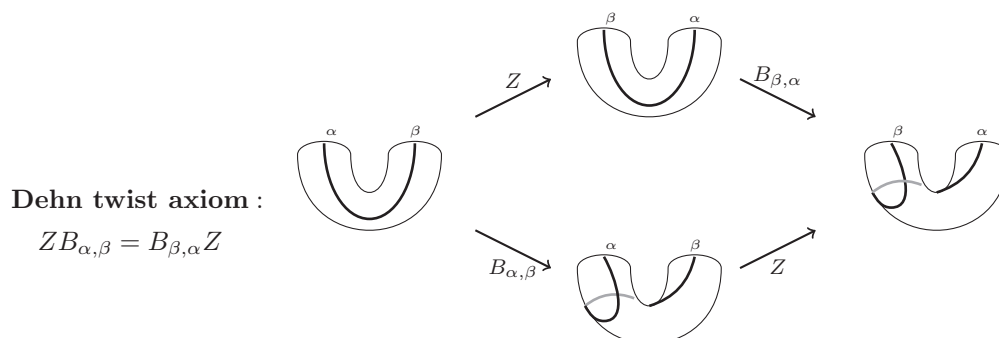
MF 9 2 穴を α, β の順で持つトーラス $S_{1,2}$ の場合, $B_{\alpha, \beta} F_{c_1} F_{c_2}^{-1} = S^{-1} T_{c_3+\beta}^{-1} T_{c_3} S$.

明らかに成立するものを除いて, 以下に必要な部分のみ確認していこう:

(MF 6)



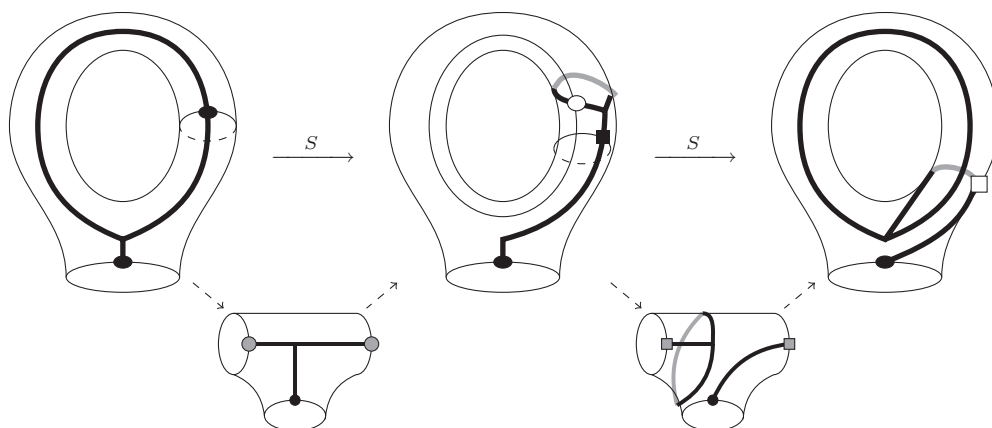
(MF 7) これは Dehn twist 公理と呼ばれることもある:



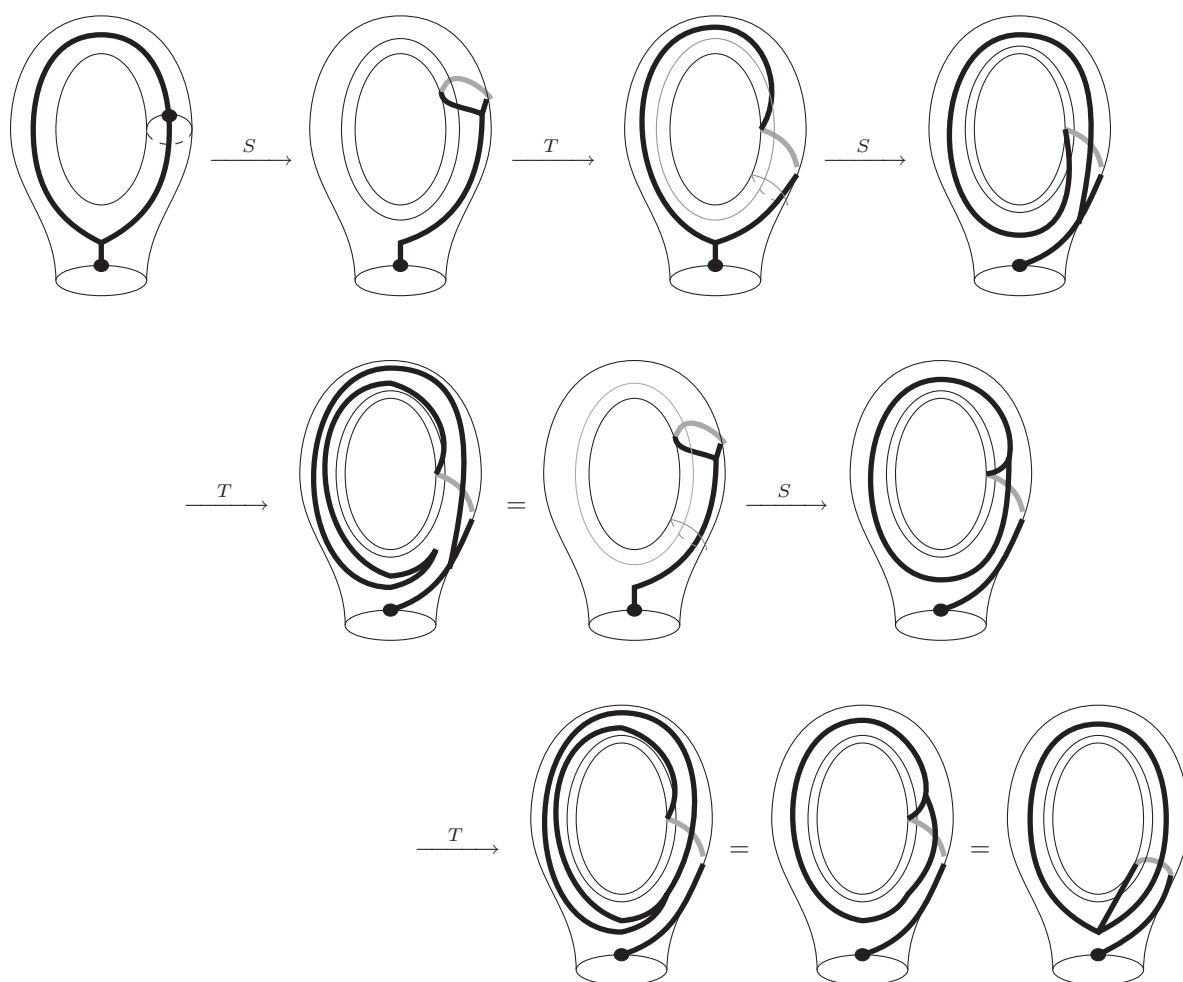
Dehn twist axiom :

$$Z B_{\alpha, \beta} = B_{\beta, \alpha} Z$$

(MF 8) [2] では再現できなかった部分である。cut の取り方に疑義があったので、 $S = S_{c_1}$ (輪切りのcut) に固定し、同等な $S^2 = (TS)^3$ を示すことにした。まず S^2 は、



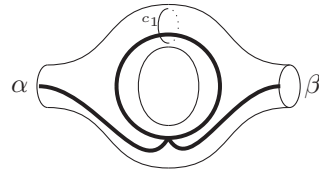
の解釈で問題ないだろう。右辺の $(TS)^3$ は、



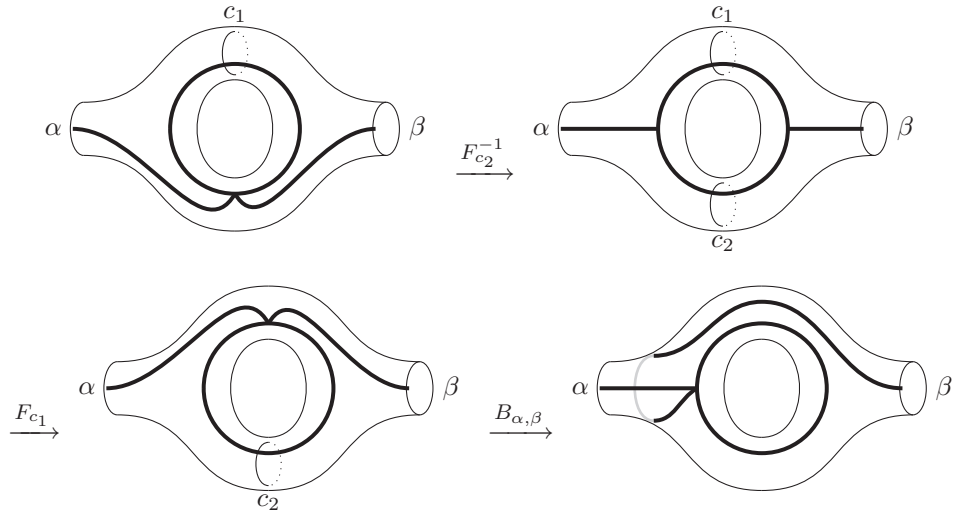
となって等号が言える。

(MF 9) この公理が最も苦勞したところである。共著者の院生 松岡 氏の助けがなければできなかった。元

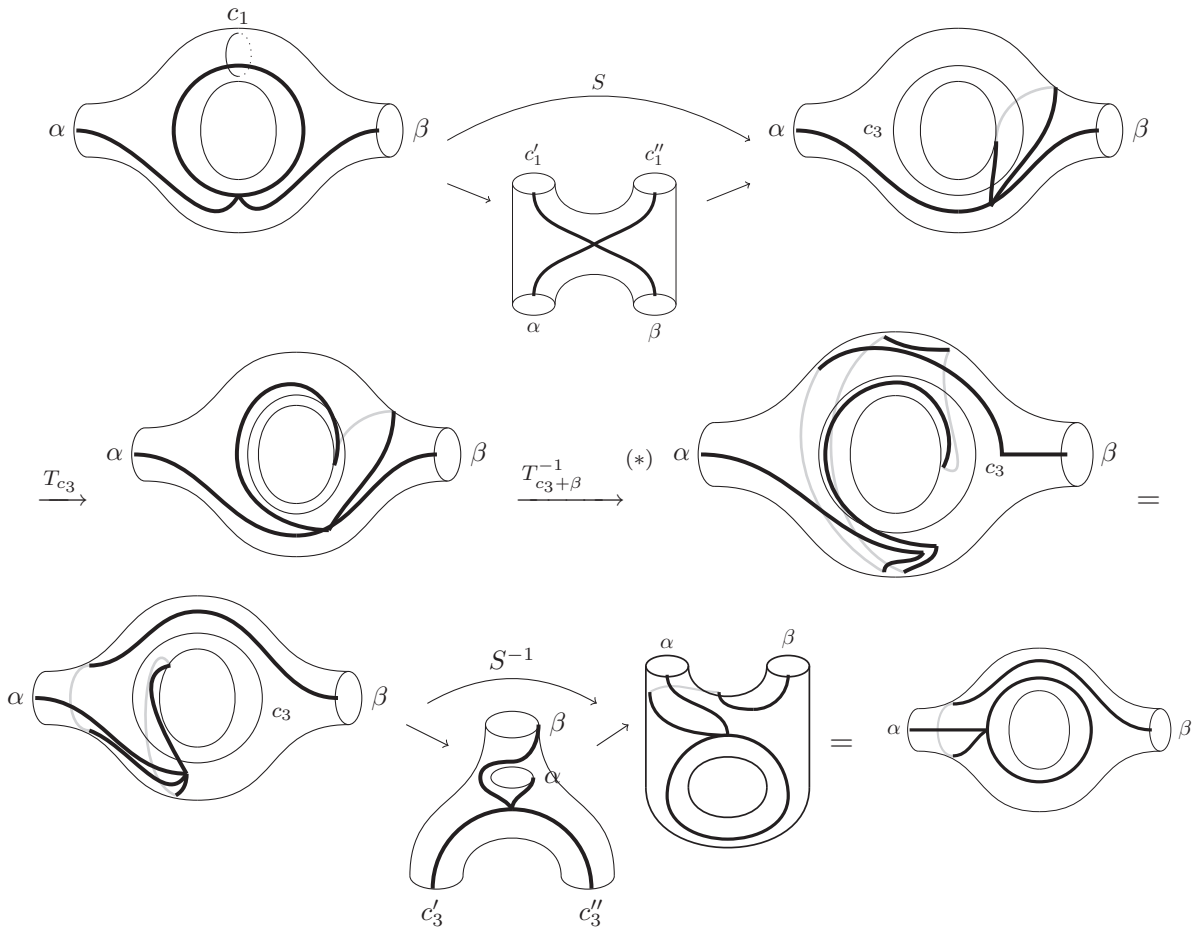
のグラフ付き図形を次のものとする：



この時、左辺 $B_{\alpha,\beta}F_{c_1}F_{c_2}^{-1}$ は、

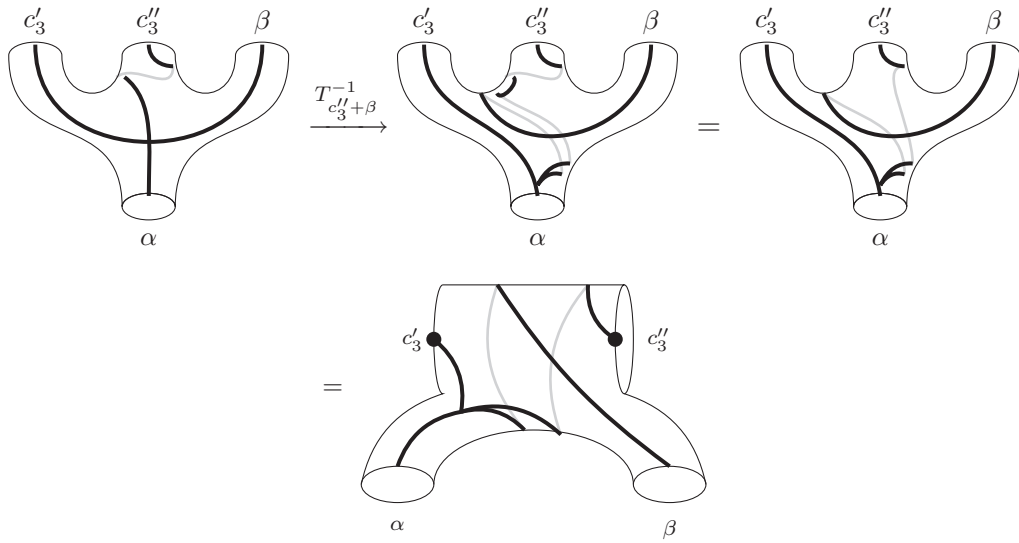


右辺 $S^{-1}T_{c_3+\beta}^{-1}T_{c_3}S$ は以下のようになる：



ここで、(*) の $T_{c_3+\beta}^{-1}$ の変換がややこしいので α  β において、 c_3 を一旦切って考え

ると次のようになる。特に $T_{c_3+\beta} = T_{c'_2+\beta} = T_{c''_3+\beta}$ より, $T_{c'_3+\beta}$ にして,



ここで c_3 を元に戻すと α  β となっている。以上により, (MF 9) を示すこ

とができた。cut 自身はパンツ分解したときに境界になるので, move では同等の扱いを受けていることに注意してほしい。

すると [10] に少しミスがあったとされた出発点の定理が得られる ([2, Th.5.2.10], [3, Th.4.24]) :

Theorem. $\mathcal{M}(\Sigma)$ の辺が, Z, F, B, S の各move で与えられているとし, 前述のMF 1–MF 9 の性質を満たすとき, $\mathcal{M}(\Sigma)$ は連結かつ単連結である。

この連結性をもとに, [2] は [10] のデータを書き換えた: 単純対象集合 $\{V_k\}$ を持つ半単純アーベル圏 \mathcal{C} における **MS data** (Moore-Seiberg data) とは, MS 1–7 の性質を持つ次の概念である:

- (1) **conformal block** と呼ばれる関手 $\langle \rangle : \mathcal{C}^{\boxtimes n} \rightarrow \mathcal{V}ec_f$ で, 有限個の V_i を除き $\langle V_i, A_1, \dots, A_n \rangle = 0$ (locally finite) となるもの。
- (2) 自然同型 $Z : \langle A_1, \dots, A_n \rangle \cong \langle A_n, A_1, \dots, A_{n-1} \rangle$.
- (3) 対称対象 $R \in \text{ind-}\mathcal{C}^{\boxtimes 2}$ の存在。
- (4) **Gluing** 自然同型: $\tau(\Sigma'; \{W_a\}, R^{(1)}, R^{(2)}) = \bigoplus_i \tau(\Sigma'; \{W_a\}, A_i, B_i) \rightarrow \tau(\Sigma; \{W_a\})$.
- (5) 可換性: 自然同型 $\sigma : \langle X, A, B \rangle \cong \langle X, B, A \rangle$.

MS1. $\forall i, \exists X \in \mathcal{C}; \langle X, V_i \rangle \neq 0$.

MS2. 関手 $\langle \rangle : \mathcal{C}^0 \equiv \mathcal{V}ec_f \rightarrow \mathcal{V}ec_f$ は恒等関手

MS3. 自然同型 $\begin{smallmatrix} G'G'' \\ G''G' \end{smallmatrix} : \langle A_1, \dots, R'(1) \rangle \otimes \langle R'(2), B_1, \dots, R''(1) \rangle \otimes \langle R''(2), C_1, \dots, C_n \rangle \cong \langle A_1, \dots, B_1, \dots, C_n \rangle$.

MS4. $Z_n = \text{id}$.

MS5. $s : R^{op} \cong R$ として,

$$\begin{array}{ccc} \langle A_1, \dots, A_n, R^{(1)} \rangle \otimes \langle R^{(2)}, B_1, \dots, B_m \rangle & \xrightarrow{G} & \langle A_1, \dots, A_n, B_1, \dots, B_m \rangle \\ \downarrow P(Z \otimes Z^{-1}) & & \downarrow Z^m \\ \langle B_1, \dots, B_m, R^{(2)} \rangle \otimes \langle R^{(1)}, A_1, \dots, A_n \rangle & \xrightarrow{G \circ S} & \langle B_1, \dots, B_m, A_1, \dots, A_n \rangle \end{array}$$

MS6. Hexagon axiom.

MS7. $Z\sigma_{A,B} = \sigma_{B,A}Z : \langle A, B \rangle \cong \langle A, B \rangle \quad (\sigma_{A,B} = G(\sigma \otimes \text{id})G^{-1})$.

半単純リボン圏のこれらのデータの標準的な定義は次のもので, MS data ができ, 逆にこの方法しかない:

S1. $\langle A_1, \dots, A_n \rangle = \text{Hom}(\mathbf{1}, A_1 \otimes \dots \otimes A_n)$.

$$\text{S2. } R = \bigoplus V_i^* \otimes V_i.$$

$$\text{S3. } Z : \text{Hom}(\mathbf{1}, A_1 \otimes \dots \otimes A_n) \cong \text{Hom}(\mathbf{1}, A_n \otimes A_1 \otimes \dots \otimes A_{n-1}).$$

$$\text{S4. } G : \bigoplus \text{Hom}(\mathbf{1}, A_1 \otimes \dots \otimes A_n, V_i^*) \otimes \text{Hom}(\mathbf{1}, B_1, \dots, B_m) \cong \text{Hom}(\mathbf{1}, A_1 \otimes \dots \otimes A_n \otimes B_1 \otimes \dots \otimes B_m).$$

$$\text{S5. } \sigma : \text{Hom}(\mathbf{1}, X \otimes A \otimes B) \cong \text{Hom}(\mathbf{1}, X \otimes B \otimes A).$$

少しだけ拡張バージョンを述べる: (twist θ が定義されている) 半単純弱リボン圏では, $\delta : V \cong V^{**}$ が定義でき, S1-S5 でやはり MS data が定義できる。逆に半単純アーベル圏の MS data はこの形しかない。

$$\theta \left| \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right. = \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \left| \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right. \theta = \psi \circ \delta \quad (\psi : V^{**} \rightarrow V \text{ の埋め込み) で定まる } \delta$$

IV MTC へ

さて CFT との関連に触れておこう。twist θ_i と量子次元 d_i で, (半単純性と単純対象数が有限が仮定されている場合, その個数の和として) ガウス和 $p \pm = \sum_i \theta_i d_i^2$ が定められ, カイラル性 p^+/p^- を示していたことを思い出そう (cf. [6])。基本となるのは, そのずれがない「カイラルフリー」($p^+ = p^-$) であった。そうでない場合には, (additive) central charge a ($e^{i\pi a} = p^+/p^-$) の値と, 複素化によって次にあげる結果は拡張されている。因みに, CFT に付随する頂点作用素代数の central charge c との関係は, $c = 2a$ である。

このように通常の 3d の設定とは違って, 2d 多様体としてグラフ付き曲面 (Lego-Teichmüller game) 主体に 2d 関手として取り扱い, 以下の結果に導くのが Moore-Seiberg [10] を拡張した Bakalov-Kirillov [3, Th.5.5.1] の手法である (細かい射の定義は略する):

Theorem (Bakalov-Kirillov). カイラルフリーな MTC \mathcal{C} に対し, 次の (1)-(4) を満たす唯一の \mathcal{C} -extended な MF τ が存在する:

- (1) n 穴の球面 $S_{0,n}$ について, $\tau(S_{0,n}; W_1, \dots, W_n) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathbf{1}, W_1 \otimes \dots \otimes W_n) \equiv \langle W_1, \dots, W_n \rangle$
- (2) $R = \bigoplus V_i^* \otimes V_i$, 自然同型 $\delta_V : V \rightarrow V^{**}$ について, 同型射 $\varphi_i : V_i \rightarrow V_i^*$ の選択によらずに, $\psi_i = \varphi_i \otimes \delta_{V_i}(\varphi_i^*)^{-1} : V_i^* \otimes V_i \rightarrow V_i^* \otimes V_i^*$ が定まって, 同型射 $\bigoplus \psi_i : R \rightarrow R^{op}$ が決まる。
- (3) $z_* = Z, b_* = \sigma, \tau(S_{0,k+1}; \dots, R^{(1)}) \otimes \tau(S_{0,\ell+1}; \dots, R^{(2)}) \rightarrow \tau(S_{0,k+1} \sqcup_{k+1,1} S_{0,\ell+1}) \xrightarrow{(\alpha_{kl})^*} \tau(S_{0,k+\ell})$
- (4) 1 穴トーラス上の s-move $s : S_{1,1} \rightarrow S_{1,1}$ で, $s_* : \bigoplus \text{Hom}(A^*, V_i \otimes V_i^*) \rightarrow \bigoplus \text{Hom}(A^*, V_i \otimes V_i^*)$ が定まる。

逆に, 半単純アーベル圏 \mathcal{C} と非退化 \mathcal{C} -extended MF に対し, \mathcal{C} 上のモノイダル圏の上記の条件に対応する構造が rigid になるような単純性を仮定するとき, \mathcal{C} は, カイラルフリーな MTC になる。

一般の結果としては, 以下のようなになる ([3, Th.5.7.10]):

Theorem (Bakalov-Kirillov). 任意の MTC に対し, central charge $K = P^+/P^-$ の MF τ が対応し, 逆に, τ が central charge K を持つ \mathcal{C} -extended な MF であるとする, \mathcal{C} 上に weak ribbon 圏の構造が入る。特に \mathcal{C} が rigid であるなら, \mathcal{C} は, $K = p^+/p^-$ となるような MTC になる。

大枠部分は, Bakalov-Kirillov [3, 2] の結果頼みになっているが, 肝心の目に見える計算部分で, かなりわかりやすく整理できたのではないと思われる。複雑で面倒な部分はたくさんあるが, 彼らのやりたいことを眺めることはできるようになったと思われる。

V おわりに

Bakalov-Kirillov の目論見は、うまくいっているので [3, 2] は、この方面の基本文献になっている。このような大きな結果なので、細かな要修正部分はあえて追及されていないのだろう。しかし、目で見えてわかる部分にギャップがあるのは非常にもったいない話である。そこで、共著者の指導院生松岡氏の修士論文指導の一部として、このような研究を行ったが、どうにか一定の形にすることはできた。グラフ付き曲面の独自の表現もわかりやすくてきたと思われる。

謝辞

本研究は科研費（課題番号:16K05253）の助成を受けたものである。

参考文献

- [1] M.F.Atiyah, Topological quantum field theory, Publications Mathématiques de l'IHÉS, **68**(1988), 175–186.
- [2] B.Bakalov and A.Kirillov, Jr., On the Lego-Teichmüller game, Transf. Groups, **5**(2000), 207–244 .
- [3] B.Bakalov and A.Kirillov, Jr., “Lectures on tensor categories and modular functor”, Amer. Math. Soc., 2001.
- [4] P.Etingof, S.Gelaki, D.Nikshych and V.Ostrik, “Tensor Categories”, Math. Surveys and Mono. Amer. Math. Soc., **205**, 2015.
- [5] 藤井淳一, Fibonacci anyon におけるトポロジカル量子計算, 数学教育研究, 大阪教育大学数学教育講座, **44** (2015), 151–164.
- [6] 藤井淳一, TQC におけるモジュラー S 行列をめぐって, 大阪教育大学紀要 第三部門, 第64巻第2号 (2016), 15–33.
- [7] 藤井淳一, テンソル圏とその応用について —TQCへ至る道—, 数学教育研究, 大阪教育大学数学教育講座, **47**(2018) 掲載予定.
- [8] 今吉洋一・谷口雅彦, タイヒミューラー空間論, 日本評論社, 1989.
- [9] S.Mac Lane: Categories for the Working Mathematician 2nd ed., Springer, 1998.
- [10] G.Moore and N.Seiberg, Classical and quantum conformal field theory, Commun. Math. Phys., **123**(1989), 177–254.

Lego-Teichmüller Model for TQC

FUJII, Jun Ichi* and MATSUOKA, Tomohide**

* Division of Science, Mathematics and Information, Osaka Kyoiku University

** Department of Pure and Applied Sciences, Graduate School of Education, Osaka Kyoiku University

Among many models for TQC, which is a theory of universal quantum computers, so-called Lego-Teichmüller game plays an important role. This is an excellent idea of Bakalov-Kirillov. But there are slight mistakes in manipulation of moves. So we try to interpret their idea by easy expressions of parameterizations for such hyperbolic surfaces.

key words : MTC, modular functor, TQC, Lego-Teichmüller game, RCFT, TQFT