

数楽落語『たちぎれ線香』

－ 1 次関数の表示と線分図 －

ふじ い まさ とし
藤 井 正 俊

(大阪教育大学 名誉教授)

(2023 年 9 月 9 日 受付)

概要：1 次関数をどう表示するかは、問題になりようもなく、押しなべて $y = ax + b$ (a, b は定数) というリアクションしかない、と思われるかもしれない。ここでは、秀逸の落語『たちぎれ線香』を基に、楽しみながら少しこの問題を考えてみたい。数楽落語『たちぎれ線香』においては、「やっぱり 1 次関数は $y = b + ax$ やな」が落ちである。その中で、線分図が本質的な役割を果たしていることが、指導上も重要な意味を持っていることが明確になる。数学的な背景は、アフィン空間の概念であることも指摘しておきたい。

検索語：1 次関数, 定数項, 1 次不等式, 線分図, アフィン空間

I. はじめに

凡そ、教育と名の付くものは、どこかで総合学習の様相を持つ。特に、小学校教育においては、それがより一層強く出るように思われる。例えば、食べ物とかお金とかに関わった具体例は、経済の範疇に入ることになる。算数の文章題を解くという行為は、必ずそこに文章理解という国語の要素が絡んでいる。さらに、解答を書くということについては、表現力という教科の枠を超えたものが要求される。この小論では、落語『たちぎれ線香』を下敷にして、1 次関数の表示について考察してみたい。その中で、線分図が本質的な役割を果たしていることが、指導上も重要な意味を持っていることが明確になる。さらに言えば、線分図の背景に、アフィン空間の考え方がある。その要点は、2 点 A, B に対して、ベクトル \overrightarrow{AB} が在って、等式 $A + \overrightarrow{AB} = B$ が成り立つ。そして、 $A + t\overrightarrow{AB}$ (t は実数) が A, B を通る直線を表すことにある。この視点は極めて重要で、1 次関数を $y = b + ax$ と表すべきとする理論的な根拠である、cf. [1], [2].

II. 『たちぎれ線香』

『たちぎれ線香』は有名な古典落語の演目の一つで、「たちぎれ」もしくは「たちきれ」、また、「立ち切れ」と漢字で表記されることもある。一般的な滑稽噺のような抜けた人物が登場せず、クスグりが非常に少ない、なおかつ悲劇的になりすぎないように演じる必要があり、演者には高い技量が要求される。三代目桂米朝は「数百を越える上方落語の中で、最も神聖化されている噺」と評している。

落語『たちぎれ線香』の概略は、次のような事である：

まず枕の部分で、かつて芸者への花代（支払い）は、線香一本のたち切る（燃え尽きる）時間を単位としていたことが説明される。なお、現在一本は30分とのことである。

お茶屋遊びが過ぎた船場の大家の一人息子の若旦那。近頃はミナミの芸者の小糸に入れ上げていて親が意見しようが、番頭が諫めようが馬耳東風、一心不乱に通いつめる。

どうしたものかと親類が集まって親族会議が開かれる。親旦那は勘当も考えているというが、京都のおじさんは、京へ連れて行って高瀬舟の綱引きをさせると言う。丹波のおじさんは、田舎へ連れて行って野良へ出て牛を追わすと提案。兵庫のおばさんは、釣り好きの若旦那を嵐になりそうな日に須磨の浦に壊れかけた舟で釣りに出せば、舟が転覆してフカの餌食になって跡形なし、後腐れなし、葬式もなしで金もかからず万事好都合と、血の繋がる縁者とも思えない言いようだ。哀れ若旦那の行く末はこの三者択一で決まりそうな気配だったが、そこへ番頭が来て、乞食になってもらうと言い出す。そうすれば金の尊さ、金を稼ぐ難しさが身に染みるだろうと、なるほど正論、名案で一同も納得した。ここまでの顛末を丁稚の定吉から聞き出した若旦那、怒って親類一同が集まっている部屋に乗り込む。番頭に「できるものなら乞食にして見い」と居直るが、逆に番頭からきつく意見され、言い返す言葉もない。ついには勘当は免れたものの、番頭の発案で百日間の蔵住まいという運びとなった。

一方、若旦那と相思相愛の芸者の小糸は連日のように文を送るが梨のつぶて。番頭が文をしまい込んで若旦那には見せていないのだ。八十日目を最後にぷつぷつと文は来なくなった。番頭は「色街の恋は、八十日か」とつぶやき、胸を撫で下ろすも、同時にがっかりもした。もしも文が百日続けば二人の仲を何とかしようと旦那に相談するつもりでいたのだった。そして若旦那の百日の蔵住まいも終わった日、蔵を出た若旦那は小糸への熱も下がり、目が醒めたようで、今までの行状を反省する。そして、番頭は小糸からの最後の文を若旦那に手渡す。それにはかすれて乱れた字で、「この状をご覧に相成りそうろう上からは、即刻のおん越しこれ無き節には、今生にてはお目にかかれまじく候」とある。

驚いた若旦那は、蔵から出られたお礼参りに天神さんへ行くと行って家を出る。途中で伴の丁稚を巻いて、ミナミの小糸の家へ行くと、女将は仏壇を開けて白木の位牌を見せ、若旦那に恋い焦がれて文を出し続けたが、梨のつぶて、何の返事もなく、そのうちに飯が喉を通らなくなって病の床についた。やせ細った小糸は若旦那からこしらえてもらった三味線を弾きながら死んで行ったと語る。若旦那は線香を上げ、小糸に謝り、小糸を偲んで仏壇の前で酒を飲み始める。すると仏壇に供えてある三味線がひとりでに鳴り始めた、「地唄の雪」を。若旦那は涙を浮かべながら耳を傾けている。どれほどの時間が経っただろうか。三味線の音がピタリと止んだ。

若旦那 「何でや？三味線の糸が切れたん違うか？ちょっと見て」、仏壇の三味線を見て、

女将 「糸は切れてえ しまへん」

若旦那 「わしの好きな地唄の雪やないか、何で終いまで弾いてくれへんのや」

女将 「若旦那、もう小糸は三味線を弾かしまへんは」

若旦那 「なんでや」

女将 「お仏壇の線香が、ちょうど立ち切りました」

さて、無粋ながら、数学に立ち入ろう。

問題 1. ここに線香がある。2 分で 1cm 立つ（短くなる）。長さは 15cm である。この線香が立ち切るのは何分後か？

この問題を解くに際し、まず「線香が立ち切る」ことを数学的にはどう理解するかが問題である。しかし、幸いにも 0 (れい) は、小学校の 1 年生で習っているので、

「線香が立ち切る」 \iff 「線香の長さが 0 になる。」

次に、 t 分後の線香の長さ $f(t)$ を求めるには、2 分で 1cm 立つので、1 分で 0.5cm 立つと理解できれば、

$$f(t) = 15 - 0.5t \quad (t \geq 0)$$

従って、

$$15 - 0.5t = 0 \Rightarrow t = 30$$

すぐ上の \Rightarrow について、少し言及したい。一般的な解き方は、

$$0.5t = 15 \quad \text{より} \quad t = 15 \div 0.5 = 30$$

だと思うが、 $15 - 0.5t = 0$ の段階で、両辺を 2 倍して

$$30 - t = 0 \text{ すなわち } t = 30$$

と、ちょっと近道することをお勧めしたい。最近の論文 [4], [5] のタイトル「先従倍始」の実践ということである。

さて、計算の仕方はさて置き、ここで一番の問題は、 $f(t) = 15 - 0.5t$ である。さらに言えば、これをそのまま許容できるかということである。そのために、もう 1 つ問題を用意する：

問題 2. 今手元に 100 万円あるとする。ここから毎月 3 万円を使うとすると、何か月それができるか？

n か月後、手元にある金額 $f(n)$ は、 $f(n) = 100 - 3n$ である。従って、 $f(n) \geq 0$ となる n の中で、最大となる n を見つけよ、という不等式の問題である。 $f(33) = 1$ なので、33 か月が正解である。

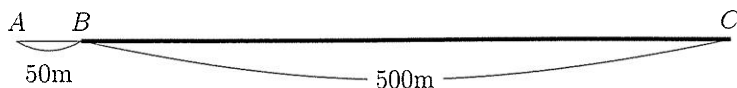
本節で取り上げた問題における状況から、1 次関数の表示において

$$y = b + ax$$

の妥当性が明白になったと考える。次節において、これについて更なる考察を深めたい。

IV. 動く歩道

さて、あの若旦那が突然旅に出ると言い出した。そして数日後、空港にやってきた。何とか手荷物検査を通過して、搭乗口へと歩き出した。荷物検査を出た地点 A から 50m 行くと「動く歩道」があった。折角だからとそれに乗ったは良いが、 $y = b + ax$ について妄想し始めた。それは、乗り口 B から降り口 C まで、長さは 500m で、その速度は 100m/分 である。



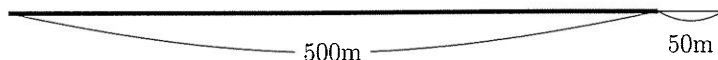
なお、「動く歩道上では、歩かないように」との注意書きがある。

さて、若旦那が時刻 $t = 0$ で B にいて、 C に向かって動く歩道に乗った。 t 分後、若旦那がいる位置 $P(t)$ を A からの距離で定める。まず、 $P(0) = 50$ そして、 $P(t) = 50 + 100t$ ($0 \leq t \leq 5$)。ここでもやはり、 $y = b + ax$ である。

ここで、若旦那が「動く歩道」に乗っているという事実をもとに解析してみよう。「動く歩道」に乗っているということは、毎分 100m のフォース $\overrightarrow{100}$ で C 方向に押されているということなので、 t 分後の位置 $P(t)$ は、 B に在ったものが t 分間 $\overrightarrow{100}$ の力を受け続けた結果なので、

$$B + t \times \overrightarrow{100} = P(t)$$

と表すのが本来であろう。 $B = P(0)$ なので、数式としては、($P(t)$ を A からの距離と見て) 上述の $P(t) = 50 + 100t$ ということになる。いずれにしても、このように点の移動という観点から見れば、 $P(t) = 100t + 50$ は論外である。蛇足ながら、後者に対応する図は次のようになるように思うかもしれない。



しかし、 $P(t) = 100t + 50$ をそのまま受け取ると、動く歩道に乗った瞬間乗り口から 50m のところにおり、4.5 分後降り口に着くが、自力で残りの 50m を 0.5 分で、しかも定速 (100m/分) でゴール地点まで移動しなければならないことになる。いずれにしても、2 つの図は、似て非なるものである。

話が、行きつ戻りつするが、 $y - 50 = 100t$ としておくと、何の問題も起こらない。これは、 B を起点にして考えるということに他ならないからである。(これについては、最終章で再度考察する。)

若旦那と小糸の悲恋で言えば、百日間の蔵暮らしの最後の方の 20 日間が何かの幸運で最初に来ていれば、80 日目の最後の文が間に合い、小糸の命が繋がっていたということになっていたかもしれない。

V. n 次式の表示

次に、2 次関数について考えてみる。標準的な展開としては、自由落下運動 $d = \frac{1}{2}gt^2$ であろう。ここで、 g は重力加速度 $g = 9.80665\text{m/s}^2$ である。

問題 3. 100m のビルの屋上から、ボールを落としたとき、その高度を時間の経過で表せ。

上で、自由落下運動の公式が与えられているので、 t 秒後のボールの高度 $f(t)$ は

$$f(t) = 100 - \frac{1}{2}gt^2 \quad (0 \leq t \leq 10\sqrt{2})$$

となる。ただし、空気抵抗はないものとしている。

この例も、2 次関数の通常の表示： $y = ax^2 + bx + c$ (a, b, c は定数) の逆になっていることに注意しておきたい。

次に、 $(1+x)^n$ の展開について考察する。組合せ ${}_nC_k = \frac{n!}{(n-k)!k!}$ を使って、

$$(1+x)^n = 1 + nx + {}_nC_2x^2 + {}_nC_3x^3 + \cdots + x^n$$

と展開できる。このように定数項から展開するのが、 x が十分小さい正数のとき、便利である。なぜなら、

$$(1+x)^n \div 1 + nx + {}_nC_2x^2 = 1 + nx + \frac{1}{2}n(n-1)x^2$$

例えば、 $x = 0.07$, $n = 10$ とすると、

$$(1+0.07)^{10} \div 1 + 0.7 + 45 \times 0.0049 = 1.7 + 0.2205 \div 2$$

もう一例として、 $x = 0.06$, $n = 12$ とすると、

$$(1+0.06)^{12} \div 1 + 0.72 + 66 \times 0.0036 = 1.72 + 0.2156 \div 2$$

これらの例は、利率 7% で 10 年間、或いは、利率 6% で 12 年間銀行にお金を預ければ、約 2 倍になる、ということを表している。これらの計算において、定数項を第 1 項とする、所謂昇幂順の展開の必要性は明白である。

最後に、指数関数 $y = e^x$ の級数展開に言及しておきたい。これは、どうしようもなく、定数項が先頭にくるしかない：

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots$$

ここで、微分に言及したい。項別微分ができるとして、 e^x を微分すると、まったく同じものになる。つまり、 $(e^x)' = e^x$ なので、もう一度微分して、 $(e^x)'' = e^x > 0$ を得る。これは、関数 e^x は凸関数であることを示している。

さて、 e^x の凸性は

(AGe) 任意の実数 α, β に対して、 $\frac{1}{2}(e^\alpha + e^\beta) \geq e^{\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}$ が成り立つ
ということである。一方、「算術幾何平均」は次のような不等式である：

(AG) 任意の正数 a, b に対して、 $\frac{1}{2}(a+b) \geq (ab)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{ab}$ が成り立つ。

ここで、次の事実を明らかにしておく。

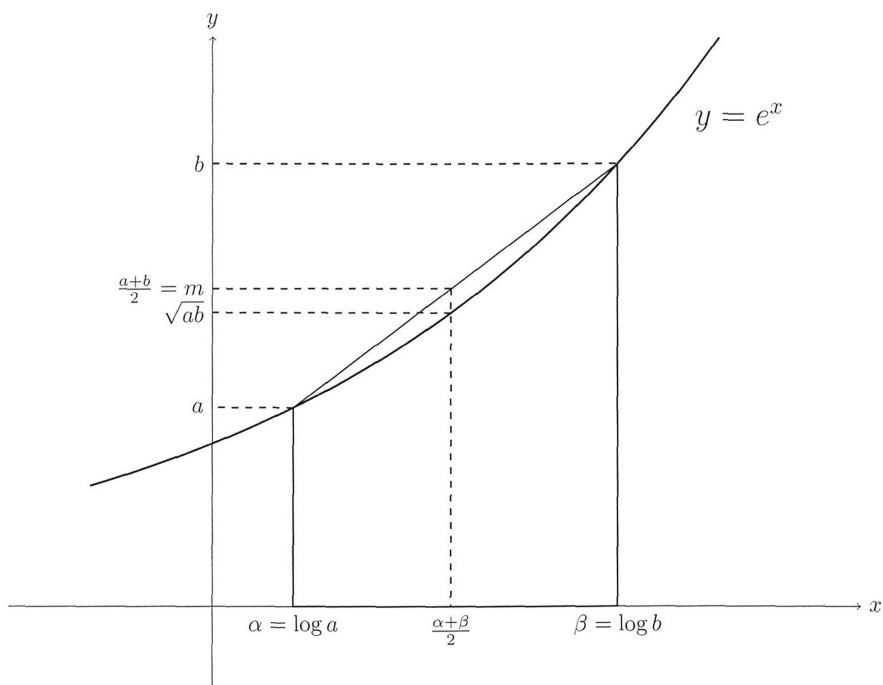
命題 4. e^x の凸性と算術幾何平均は、同値である。

証明は、(AGe) において、 $a = e^\alpha$, $b = e^\beta$ とすると、 $\alpha = \log a$, $\beta = \log b$ であるので、(AGe) は、

$$\frac{1}{2}(a+b) \geq (ab)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{ab}$$

が成り立つことを保証している。つまり、通常の算術幾何平均の不等式が出てくることになる。

逆方向 (AGe) \Rightarrow (AG) も同様に示すことができる、cf. [3].



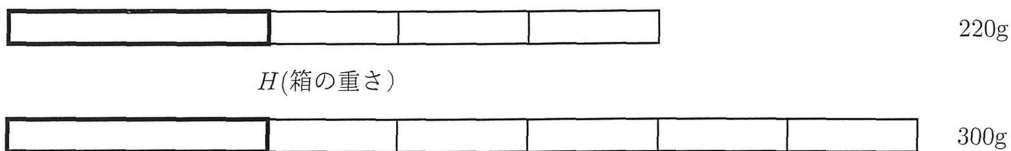
なお、この事実を裏返すと、 e^x の逆関数 $\log x$ の凹性と算術幾何平均の不等式の同値性も同時に言えることになっている。

VI. おわりに

上記のような議論は、数学的にはアフィン空間の思考をベースにしたものであることを注意しておかねばならない。このような提案は、以前からなされている。例えば、[2]（第1節）及びその参考文献にある。そこで次のような問題が取り上げられている。

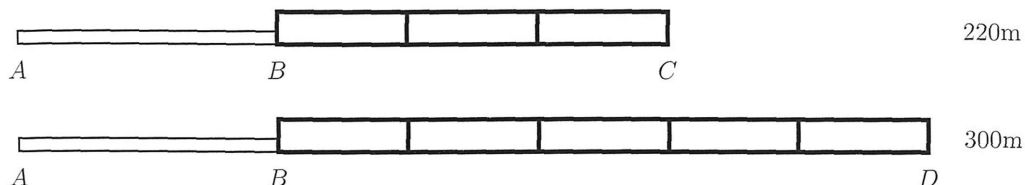
問題5. ある箱に3つの同じ菓子を入れたら 220g, 5つ入れたら 300g でした。箱と菓子の重さはそれぞれ何g か？

[2] の説明は、上記と同じように線分図に表してみると、アフィン空間の思考がよく理解できるし、正解に到る道筋もなだらかであることが知られるであろう。



上の図は、 H から3つ分進むと 220g, 5つ分だと 300g なので、それらの差である菓子2つ分が総グラム数の差 $(300 - 220)\text{g}$ より、菓子1つ分は 40g であることが分かる。線分図で描いてはいるが、それぞれ $H + 3X$, $H + 5X$ (X は菓子1つ分に当たるベクトルである。) に対応している。ここで、上記の線分図は、4節の動く歩道の線分図と同質のものであることに注意しておきたい。問題5は、例えば、次のように書き直せる：

問題5'. ある地点 A から B まで進むとそこから同じ長さの動く歩道が5つ用意されている. J は A から B まで進んだ後, 動く歩道を3つ利用し C で降りた. 一方, K は A から B まで進んだ後, 動く歩道を5つ利用し D で降りた. AC は 220m , AD は 300m であった. AB 間と動く歩道1つ分の長さは何 m か?



要するに, アフィン空間の考え方は, このような形で露わになるが, 本来は極めて自然で日常生活に密着したものである. このような背景を理解した上での指導が, 子どものより深い理解に繋がると考える, cf. [1].

何回か「アフィン空間」という概念を使ってきたが, それについての説明をしておきたい. しかし, それは極めて我々の日常事の抽象化である. 典型的な事例は, 「時」と「時間」の関係で説明できる. 例えば, 2時から5時までは3時間は,

$$5\text{時} - 2\text{時} = 3\text{時間}$$

と表せる. あるいは, 2時から3時間が経過すると5時になると読み替えると, 和を使って

$$2\text{時} + 3\text{時間} = 5\text{時}$$

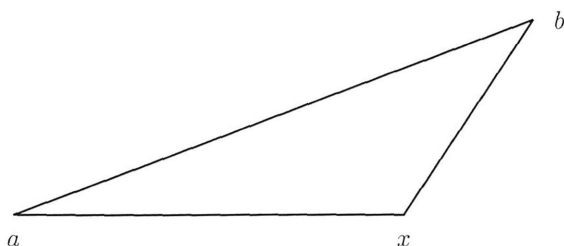
と書ける. 「時」と「時間」の組をアフィン空間として捉えられる. アフィン空間は, 一般的に次のように定義される [1]: 集合 X (とそれに付随するベクトル空間 \vec{X}) が, つぎの条件を満たすとき, アフィン空間と呼ぶ.

(0) 任意の $a, x \in X$ に対して, $x - a \in \vec{X}$ が定まる. ($x - a = \vec{ax}$ と表す.)

(1) 任意の固定した $a \in X$ に対して, $D_a(x) = x - a$ によって定義された写像 $D_a: X \rightarrow \vec{X}$ が全単射である.

(2) 任意の $a \in X$ に対して, $a - a = 0$.

(3) 任意の $a, b \in X$ に対して, $b - a = (x - a) + (b - x)$ ($x \in X$).



最後に, IV 節「動く歩道」の末尾の「 $y - 50 = 100t$ としておくと, 何の問題も起こらない。」について言及したい. さて, 上記の定義の (0) で明らかなようにアフィン空間では, $y - 50$ はベクトルである. 右辺 $100t$ も正確にはベクトル 100m/分 の t 倍であるので, $y - 50 = 100t$ はベクトル

の等式である。勿論この場合は、数式としての等式でもあるが、一方、 $y = 50 + 100t$ は位置についての等式である。勿論、数式としての等式でもあるのだが、数楽なので、固いことを言うつもりはないが、ちょっとした違いを楽しむのも一興かと思う事である。

参考文献

- [1] 小島順 “量の計算”を見直す 数学セミナー 1977 9月号 1-12.
- [2] 藤井淳一 射影写像としての3Dグラフィックス数学教育研究—関数教育スピンオフ— 142 (2013) 103-112.
- [3] 藤井正俊 内なる他者との対話—冪平均の場合— 数学教育研究 48 (2019) 29-38.
- [4] 松本明美 藤井淳一 先従倍始(その1) 数学教育研究 51 (2022) 13-26.
- [5] 松本明美 藤井淳一 先従倍始(その2)「倍・比」の指導を巡って 数学教育研究 52 (2023) 11-26.